Support de cours

Cours:

PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet)

Vidéo:

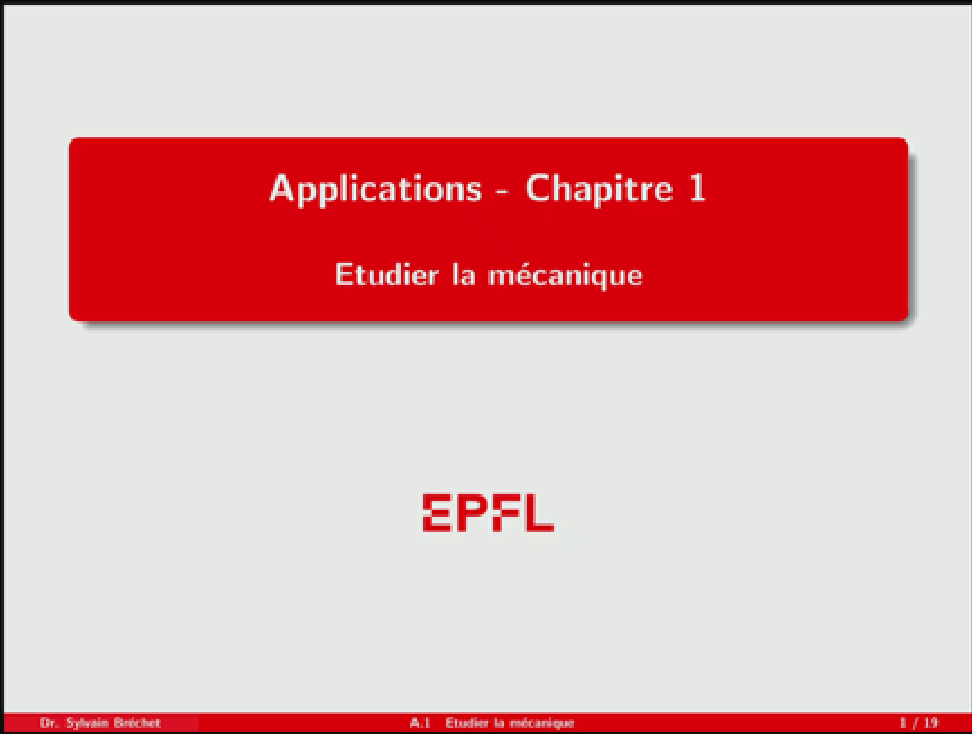
A1 - Etudier la mécanique

Concepts (extraits des sous-titres générés automatiquement) :

N factorial. Factorial d'un nombre premier. Dérivés de fonctions. Puissance saine. Puissance n. Fin de la semaine. Produit vectoriel. Factorial fois. Règle de calcul. Chose promise. Facteur combinatoire. Premiers termes. Dérivés de composition de fonctions. Enregistrements vidéo. Valeurs entières.

vers la recherche de séquences vidéo
(dans PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet).)

vers la vidéo

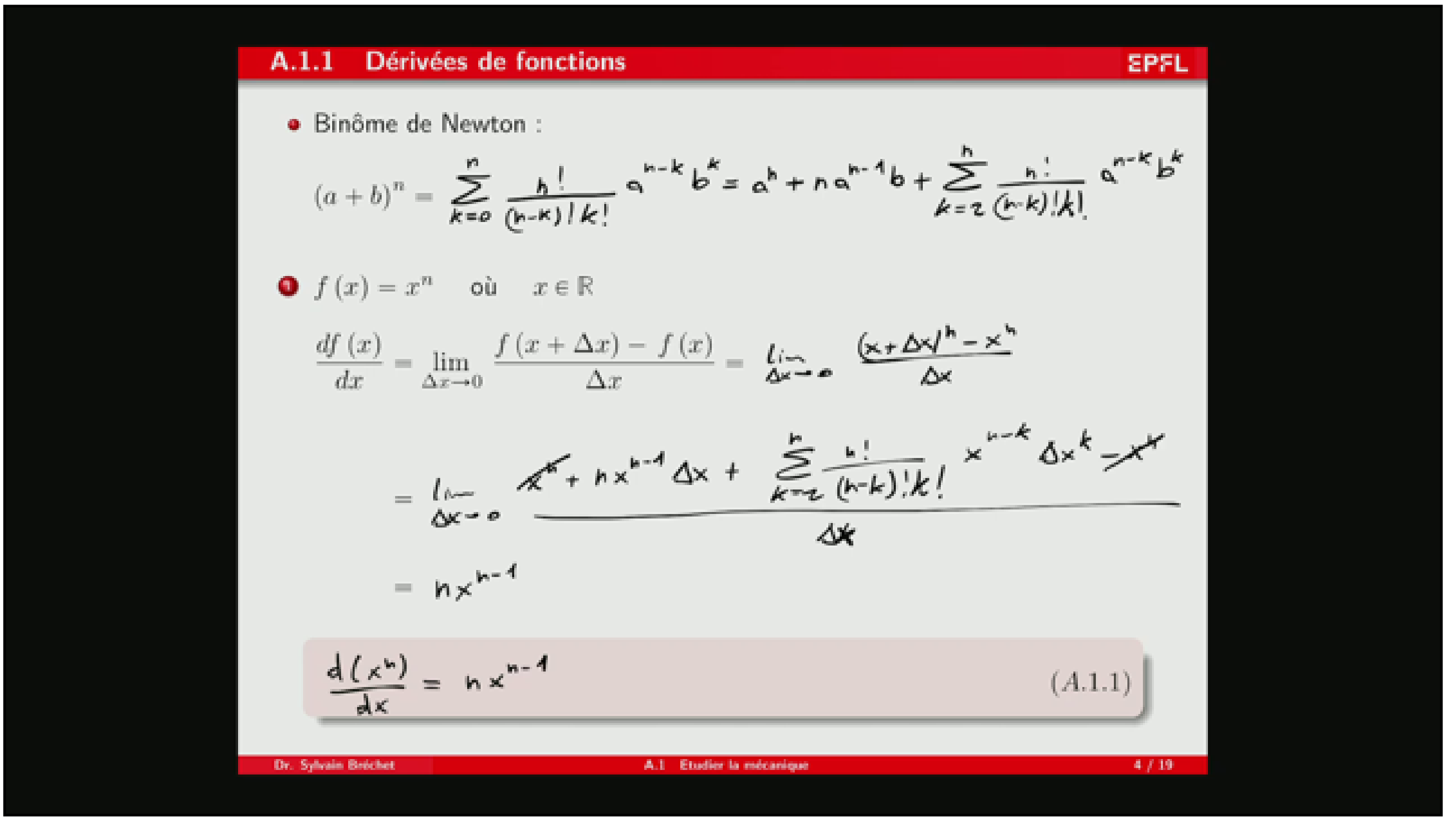


...

notes

résumé

0m 0s

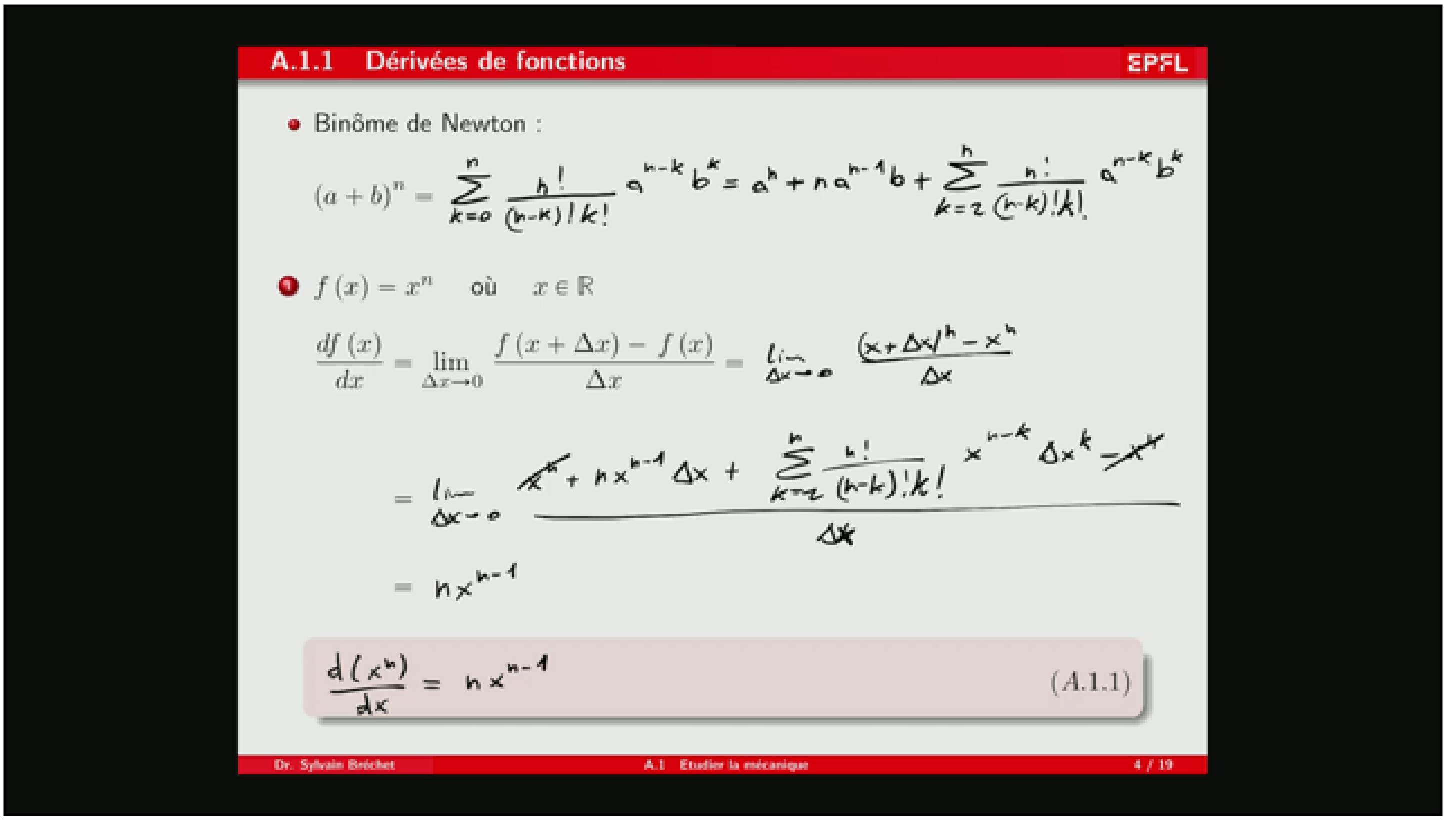


Ces sous-titres ont été générés automatiquement Voilà donc chose promise chose du on va voir ensemble cet après-midi des applications de ce premier chapitre de cours d'accord donc on va calculer ensemble essentiellement des dérivés de fonctions et des dérivés de composition de fonctions on verra un exemple de développement limité et puis on va également voir une règle de calcul très simple pour le produit vectoriel qui est une interprétation géométrique et pour terminer on verra une règle de calcul générale pour la dérivée temporelle d'un produit de fonction du temps alors si je vous demande de calculer la dérivée d'une fonction de la variable x d'une fonction f définie comme x élevée à la puissance saine monôme vous connaissez certainement tous la réponse ou presque en revanche comment est-ce qu'on peut le démontrer ça c'est plus technique et c'est ce qu'on va faire ensemble pour commencer pour se chauffer pour pouvoir y arriver on aura besoin d'une identité cette identité c'est le binôme de newton on prend de nombre l'un nombre à nombre b on les additionne et on les allève à la puissance f alors se faisant on va multiplier des parenthèses ensemble il y aura de la combinatoire cachée et cette combinatoire va se manifester sous la forme d'une série on va se retrouver avec la somme sur l'indisca qui peut prendre des valeurs entières de 0 jusqu'à n on va se retrouver avec un facteur combinatoire oui la réponse est oui effectivement je vais remettre les slides complet mais je ferai ça la fin de la semaine d'accord vous aurez aussi accès aux enregistrements vidéo à la fin de la semaine d'accord voilà donc on a un facteur combinatoire qui est la la combinaison de k élément pris parmi elle pour ce faire on introduit des factorials est-ce que tout le monde est au clair sur ce qu'est une factorial la factorial d'un nombre premier

notes

résumé

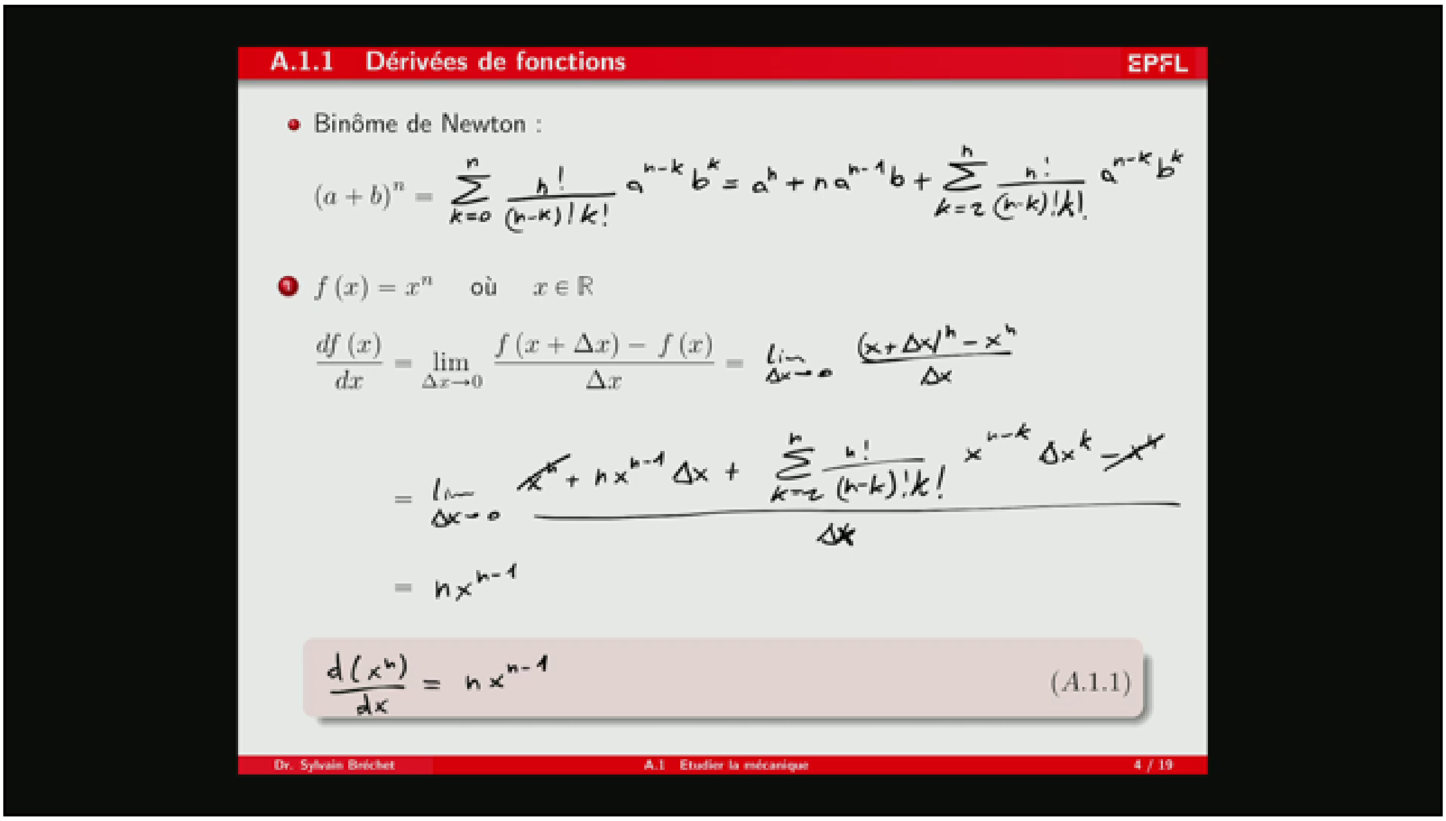
0m 1s



est le produit du facteur de la nombre réel je voulais dire d'un nombre entier et le produit de tous les entiers inférieur ou égal à n d'accord donc on a n factorial divisé par n moins k factorial fois k factorial fois à élever à la puissance n moins k fois b élever à la puissance k et alors on va voir que dans la pratique ce qu'on aura besoin de faire c'est d'extraire les deux premiers termes de plus faible valeur de k de cette somme donc pour le premier terme qui est le terme en k égale 0 on va se retrouver avec n factorial divisé par n moins 0 c'est à dire n factorial ce qui fait 1 divisé par 0 factorial et 0 factorial ça fait 1 d'accord pourquoi parce que n plus un factorial c'est n plus 1 fois n factorial alors maintenant prenez n égal à 0 vous allez vous retrouver avec un factorial qui est une fois 0 factorial 1 factorial 7 1 donc 0 factorial 7 1 aussi d'accord donc on va se retrouver avec à élever à la puissance n qui multiplie b élevée à la puissance 0 qui est 1 d'accord et le terme suivant sera n factorial sur n moins 1 factorial qui est n divisé par un factorial qui reste n on aura n qui multiplie à élever à la puissance n moins 1 fois b élever à la puissance 1 il va rester tous les autres termes de la série soit les termes de la somme de k qui prend les valeurs entières de 2 à n 2 n factorial sur n moins k factorial k factorial quand fois à élever à la puissance n moins k fois b élever à la puissance k alors vous allez voir dans quelques instants pourquoi cet utile est important de faire ceci alors maintenant on a la définition qu'on

notes

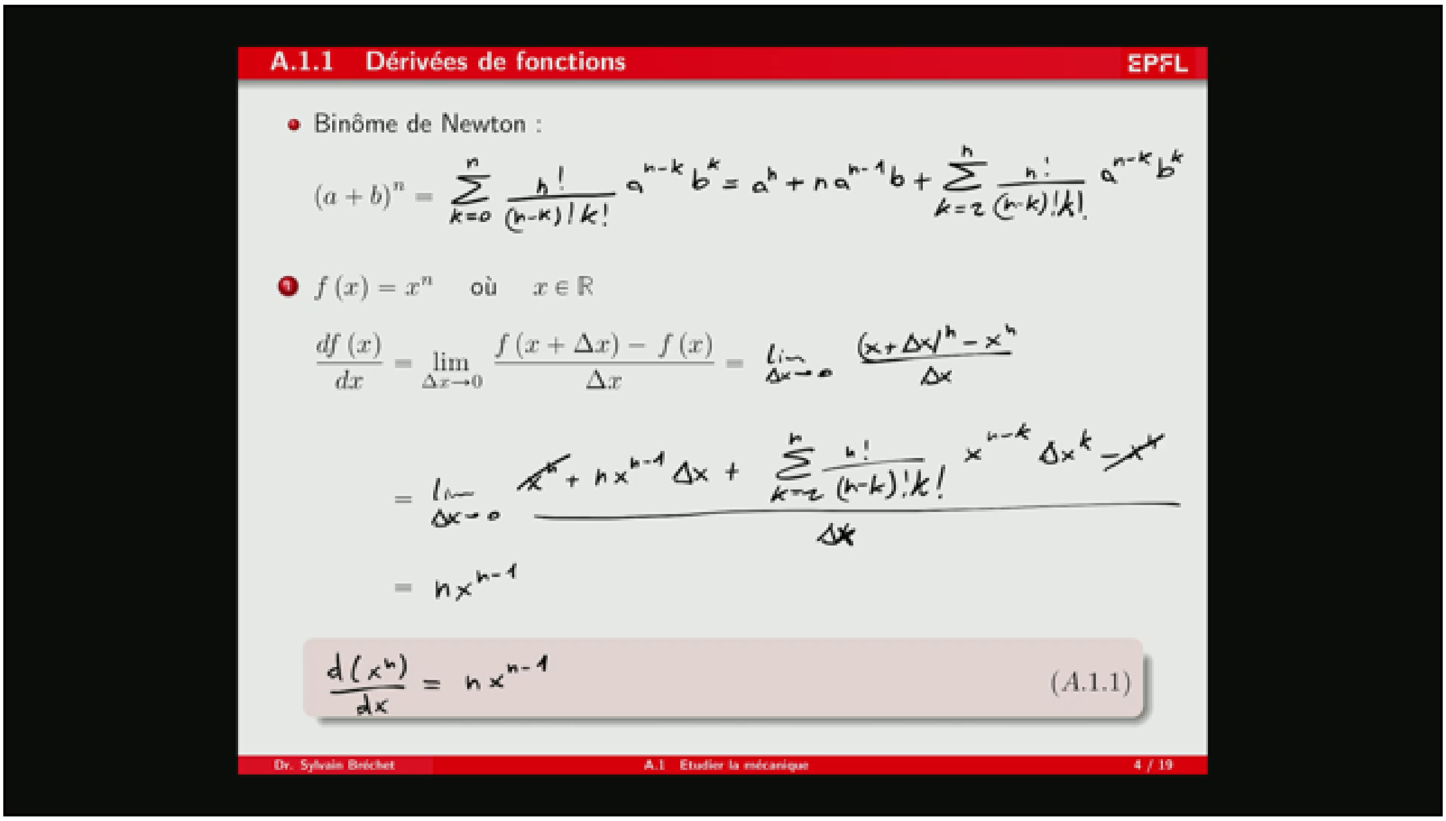
résumé



introduit ce matin de la dérivée sous forme de limite et on va prendre un numérateur d'accord et l'explicité alors on laisse notre limite qui est donc la limite de delta x qui tend vers 0 et la fonction va élever l'argument à la puissance n on aura donc pour commencer x plus delta x élever à la puissance n dont on retrange x élever à la puissance n le tout est divisé par delta x et on prend la limite lorsque delta x tend versé d'accord alors ce qu'on peut faire maintenant c'est prendre x plus delta x élever à la puissance n quand s'inspirer du binaulte de newton et dans ce binaulte on va remplacer clairement à par x et b par delta x et on récrit le résultat on aura donc la limite de delta x qui tend vers 0 de x élever à la puissance n plus n fois x élever à la puissance n moins 1 fois delta x plus la somme sur k égale 2 à n de n factorial sur n moins k factorial sur k factorial fois x élever à la puissance n moins k fois delta x élever à la puissance k et n'oublions pas qu'il faut d'une part retrancher x élever à la puissance n prendre le tout et le diviser par delta x c'est pas un k c'est bien x alors la première chose qu'on voit c'est que les termes de plus au degré les termes x n se simplifient allons un tout petit peu plus loin regardons le deuxième terme qu'il est ici vous voyez qu'il est proportionnel à delta x oui mais attention on a au dénominateur un delta x donc c'est delta x on se simplifier qu'en est-il maintenant de la somme que vous voyez ici et bien dans cette somme vous allez retrouver un delta x élevé à la puissance k et ce delta x

notes

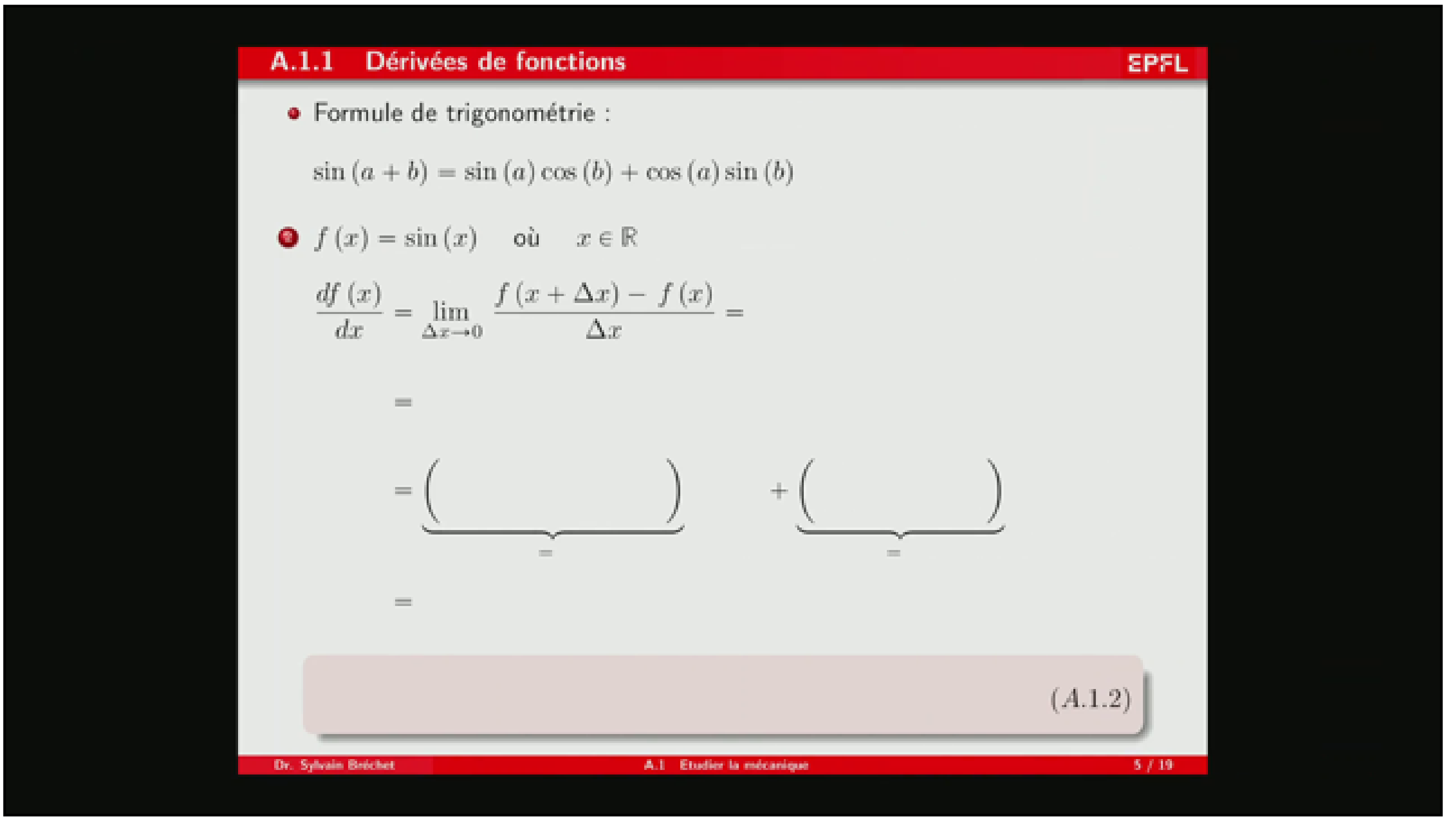
résumé



élevé à la puissance k est divisé par delta x or par hypothèse k est plus grand ou égal à deux ce qui veut dire que le terme de plus bas degré sera un terme de degré 1 en delta x en d'autres termes lorsque delta x tend vers 0 qui est ce qu'on fait en prenant la limite d'accord tous les termes qui sont ici divisé par delta x vont tendre vers 0 donc il ne contribue pas au résultat en d'autres termes il va donc nous rester n fois x élever à la puissance n moins 1 et donc sans surprise la dérivée de x élever à la puissance n par rapport à x c'est tout simplement n fois x élever à la puissance n moins 1 d'accord oui

notes

résumé



oui oui oui non en fait on a sorti les deux premiers termes qui s'est passé c'est qu'on a sorti deux premiers termes c'est pour ça qu'on commence à deux normalement la somme comment ça dit ça 0 avec les deux premiers termes sorti il nous reste le reste il apparaît dans la dernière s'il faut juste que je fasse un fris de l'écran

notes

résumé

6m 25s

sur l'écran latéral maintenant on va faire quelque chose d'analogue pour déterminer ensemble la dérivée du sinus d'accord on aura là aussi besoin d'une formule à savoir le sinus de la somme de deux angles ici a et b le sinus est une fonction impair donc elle va faire intervenir le sinus et le cosineus d'accord il faudra les multiplier ensemble pour avoir une fonction impair donc on va avoir un produit de sinus cette cosineuse avec a et b dans les deux sens pour se rappeler du signe qui est ici un signa plus le plus simple c'est de prendre des valeurs particulières que sont zéro épisodes et voyez tout de suite que cette formule là elle est vraie d'accord donc il n'y a pas besoin d'apprendre pour il a vérifier tout de suite vous pouvez même la vérifier le jour de l'examen en réfléchissant rapide d'accord maintenant on va ensemble écrire la dérivée de notre fonction f de x qui est le sinus de x sous la forme d'une limite lorsque delta x tend vers 0 d'accord f de x plus delta x évidemment le sinus de l'argument qui est x plus delta x on retrange le sinus de x d'accord et puis on va diviser le toutes par delta x et là on va utiliser la formule de trigonométrique qui est ici en remplace a par x b par delta x quand on aura donc notre limite de delta x qui tend vers 0 ok puis on aura le sinus de x fois le cosineuse de delta x plus le cosineuse de x fois le sinus de delta x moins ne l'oublions pas le sinus de x on divise de toutes par delta x nous ce qui vous a tels à s'éviament c'est de regarder ce qui se passe lorsque delta x tend vers 0 on veut une réponse en termes de x d'accord donc on va

notes

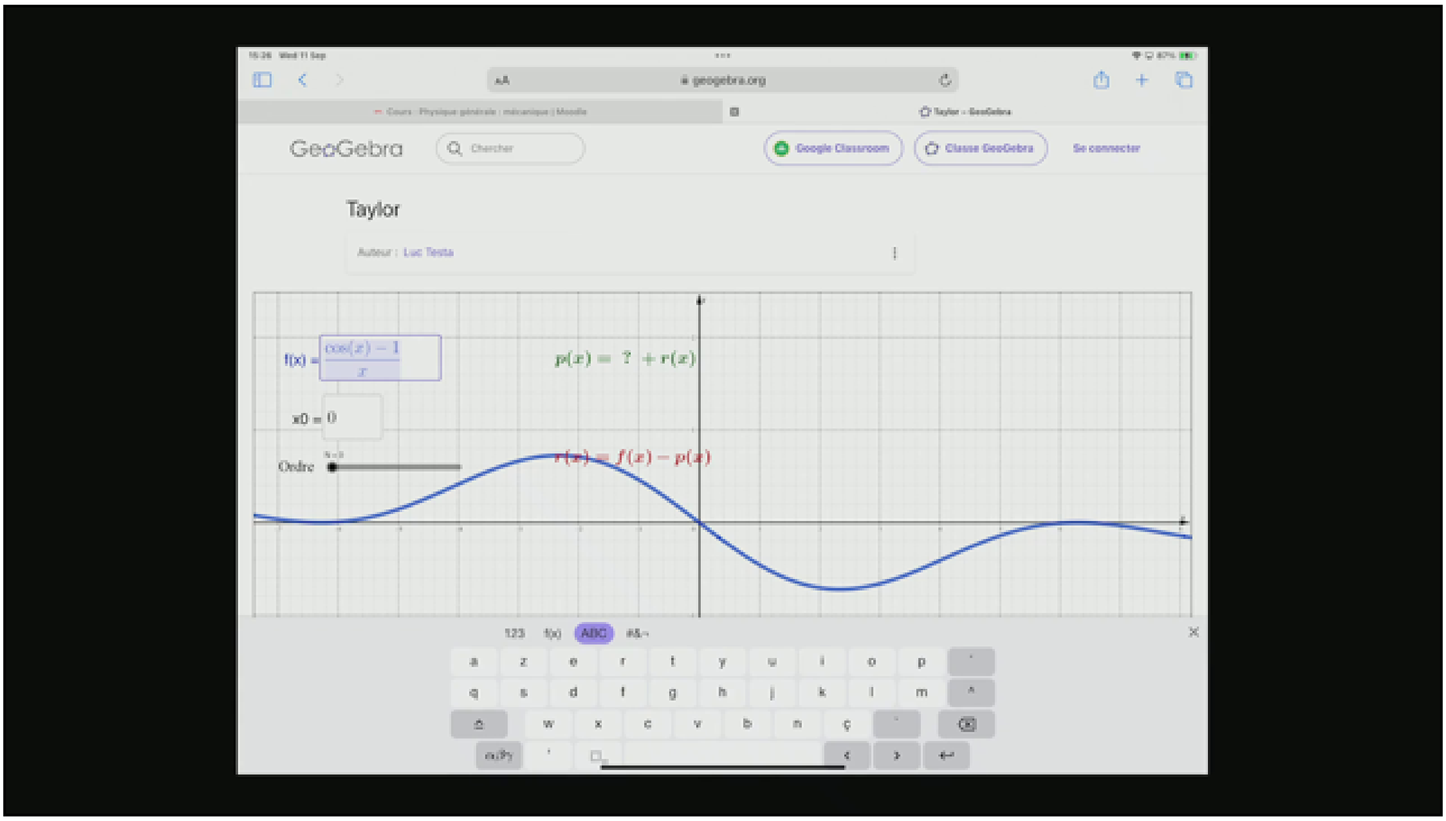
résumé

6m 57s

factoriser par le sinus de x et le cosineuse de x on aura une première limite qui est la limite de delta x qui tend vers 0 du cosineuse sin de delta x moins 1 sur des tailles et le tout va multiplier le sinus de x on aura une deuxième limite de delta x qui tend vers 0 du rapport du sinus de x de delta x excusez moi voilà sur delta x le toutefois le cosineuse de x alors il ya plusieurs manières de trouver la solution on peut le faire de manière graphique si vous regardez la fonction sinus par exemple voyez tout de suite que lorsque la fonction sinus est petite et bien elle va être approximée par x ou si vous voulez le sinus de delta x va être approximé par delta x et donc dans cette limite le résultat de la deuxième limite vaut 1 d'accord et pareil pour le cosineuse de delta x en fait on arrive à montrer que le cosineuse de delta x moins 1 sur x vaut en réalité en réalité 0 pourquoi parce que le cosineuse de x va tendre vers 1 lorsque delta x est très petit alors le mieux en fait c'est de le faire j'ai envie

notes

résumé



de dire graphiquement c'est ce qu'on va faire ensemble rapidement donc il ya une app qui est toujours la même que celle que je vous ai montré ce matin que vous retrouverez sur le site Moodle du cours vous avez un lien vers cette application Taylor sur les développements limités et là ce que vous voyez à l'écran c'est le cos de x moins 1 sur x vous remplacer x par delta x c'est la même chose d'accord voyez que lorsque la variable est petite et bien lorsqu'elle tend vers 0 le résultat

notes

résumé

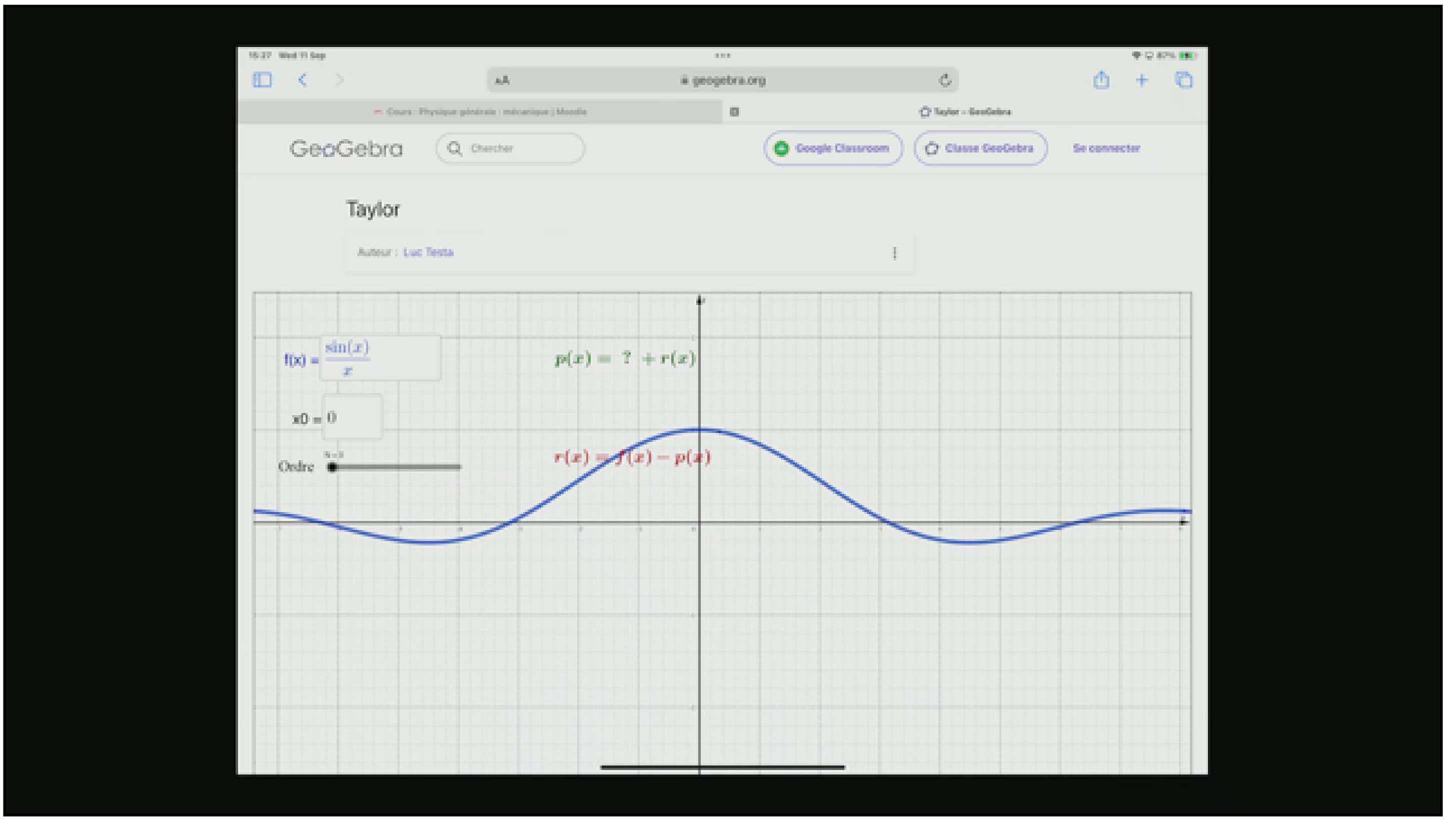
10m 8s

du cos de x moins 1 sur x tend vers 0 alors si maintenant on prend plutôt disons le sinus

notes

résumé

10m 35s

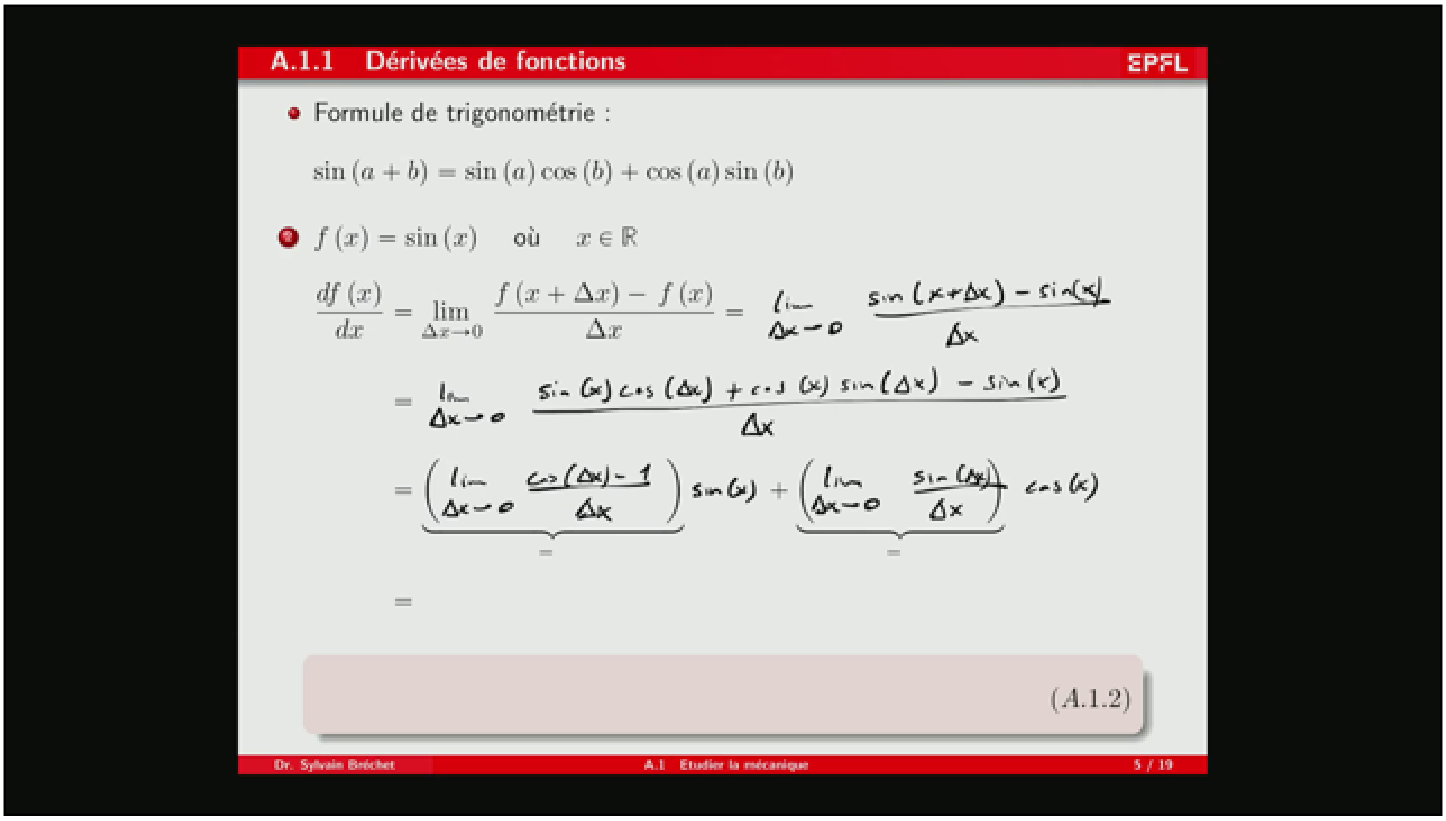


de x et puis qu'on alors que je retrouve je crois que c'est ici c'est ça voilà non attendez il faut que j'aille ici au bout voilà je prends les parenthèses et là je divise et là je pense que c'est bon voilà c'est ça on va le diviser par x et on regarde ce qui se passe aux alentours de vie

notes

résumé

10m 43s

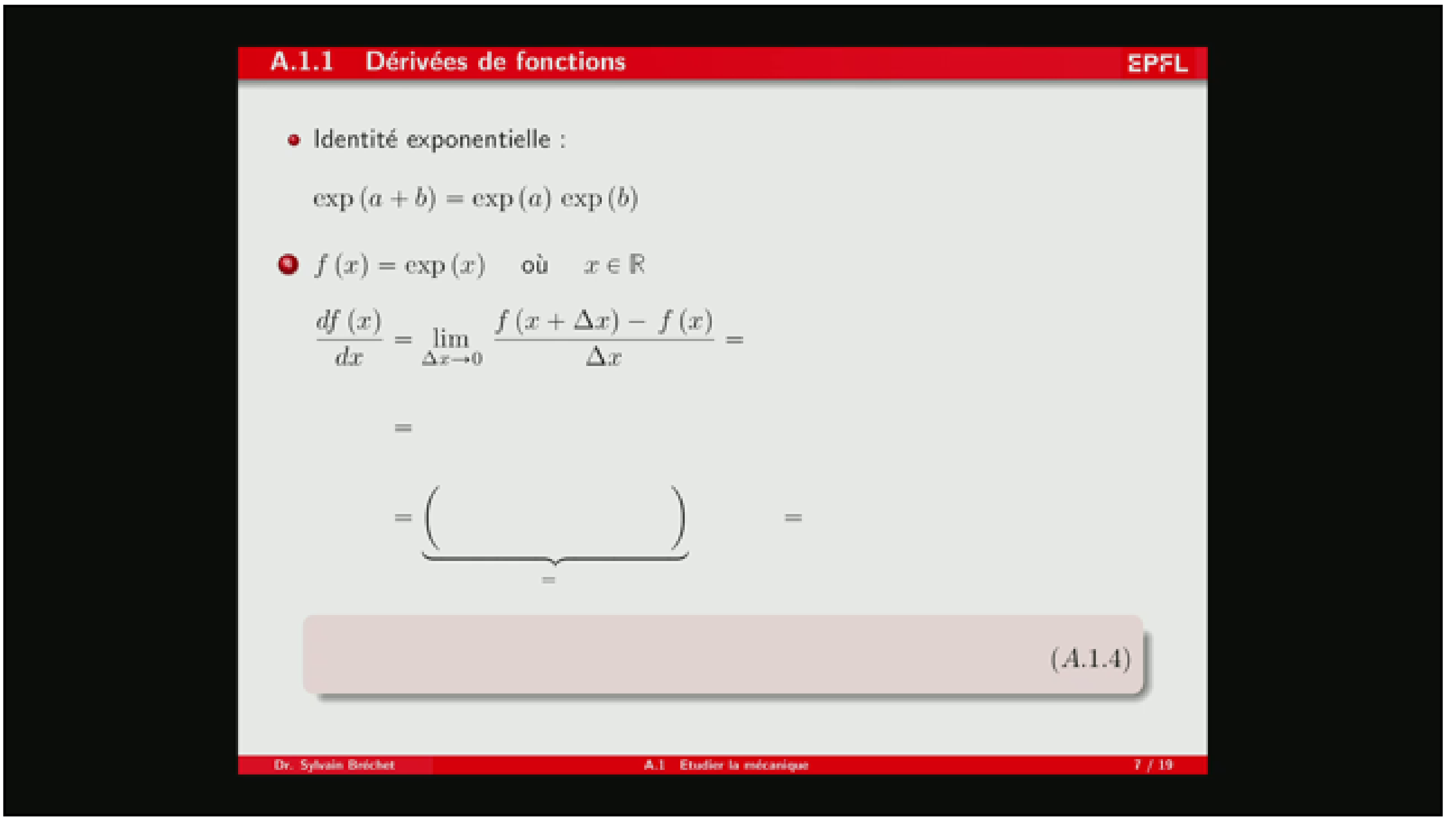


quand alors voyez que le rapport du 6 de x sur x va tendre vers quand est ce que vous voyez clairement en prenant simplement la fonction sinus la voici ok et vous regardez son développement limité par exemple à l'ordre 1 voilà autour de l'origine voyez que le développement limité la tangente d'accord va être la tangente qui est donnée par par x en fait va clairement reproduire en première approximation le graphe de la fonction sinus lorsque la valeur de la variable est

notes

résumé

11m 2s



suffisamment petite ok donc ce qu'on a montré c'est que cette première limite tant vers 0 cette deuxième vers 1 le résultat c'est donc le cosinus de x d'accord donc la dérivée du sinus de x par rapport à x c'est le cosinus de x alors avec des arguments en tout point similaire avec les mêmes limites en réalité en partant d'une formule de trigonométrie qui est le cosinus de la somme de deux angles on parvient là à montrer que la dérivée du cosinus c'est l'opposé de du sinus d'accord on va pas le faire explicitement pour elle faire on le fera si nous restent un peu de temps mais il y a des choses plus intéressantes à faire d'abord comme par exemple de calculer la dérivée de l'exponentiel oui alors ça vous pouvez le voir explicitement en faisant des développements limités en réalité mais si vous voulez les développements limités eux-mêmes reposent sur dérivée d'accord donc celle serpent qui se mord la queue le plus simple c'est de tracer le graphe

notes

résumé

11m 44s

de la fonction et de voir son comportement d'accord dans un premier temps mais disons toutes ces techniques sont complémentaires les unes aux autres alors partons de la fonction exponentielle de l'identité exponentielle à savoir que l'exponentiel d'une somme de deux valeurs de nombre réel a plus b c'est le produit de l'exponentiel de A fois l'exponentiel de b d'accord plus maintenant on veut calculer la dérivée de cet exponentiel alors on l'écrit sous forme de limite on a la limite de delta x qui est envers zéro de l'exponentiel de x plus delta x moins l'exponentiel de x la toute divisé par delta x alors il est clair qu'en utilisant l'identité qu'on vient d'introduire on est alors capable au millérateur de remplacer l'exponentiel de la somme de x et de delta x par le produit des exponentiels de x ainsi que de delta x d'accord on retranche l'exponentiel de x et on divise de toutes par delta x en prenant la limite là aussi on va mettre en évidence l'exponentiel de x alors on a notre limite de delta x qui est envers zéro d'accord et on aura la limite explicite de l'exponentiel de delta x moins 1 sur delta x quand alors là pour répondre à la question que vous posiez tout à l'heure dans ce contexte là si vous prenez le développement limité de l'exponentiel en fait vous allez avoir 1 plus x plus des termes plus élevés d'accord alors typiquement si vous enlevez le 1 alors maintenant c'est un détaill x donc c'est 1 plus delta x d'accord si l'exponentiel de x devait un plus d'attaix moins 1 ça offre un delta x ou d'ici par delta x ça fait d'accord alors ceci on peut le voir là aussi de manière graphique je juste rapidement faire un frise de l'écran

notes

résumé

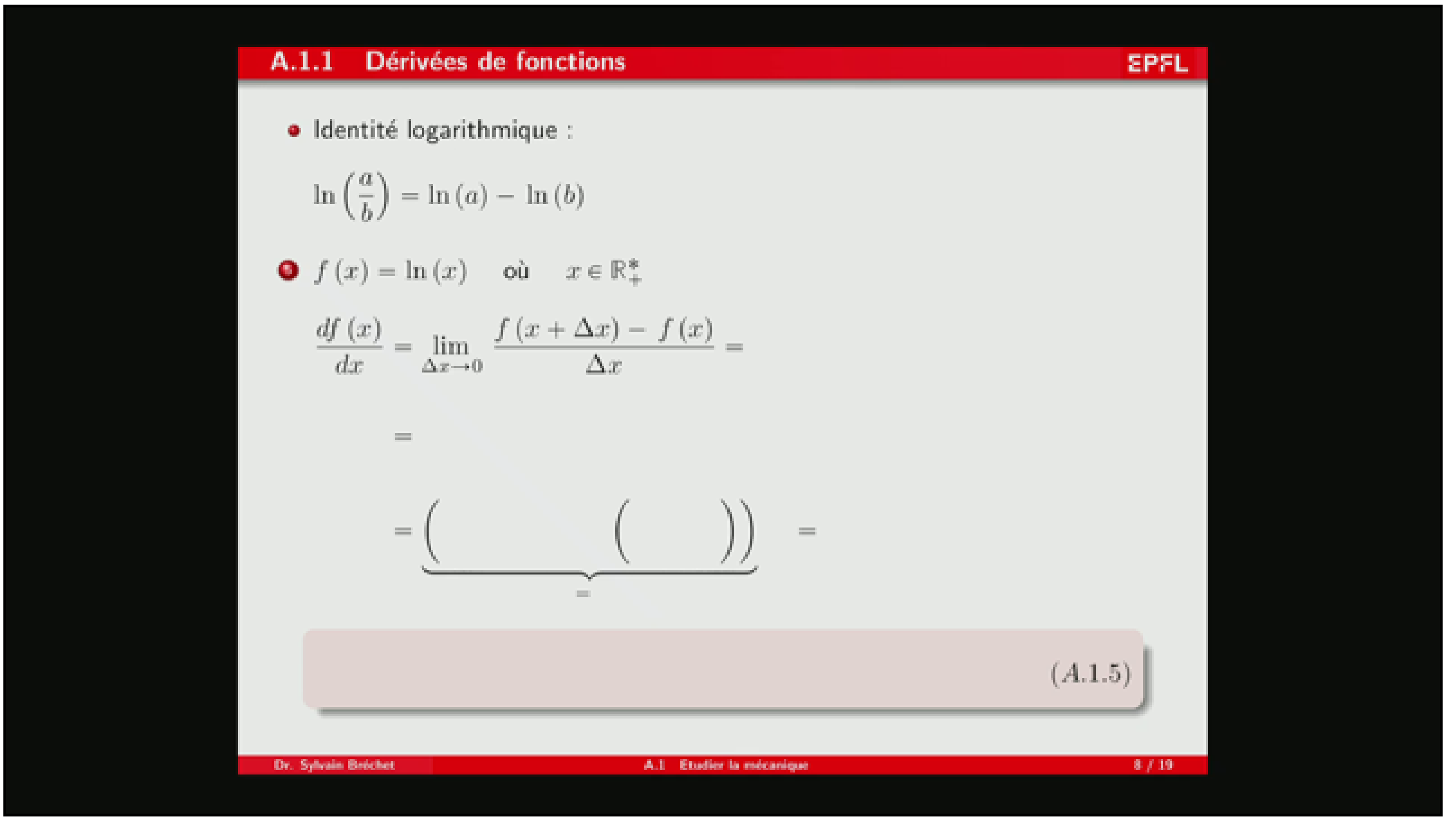
12m 49s

prenons donc l'exponentiel à l'heure je crois qu'elle est pas sous les fonctions normales attendez voir il faut que j'apprenne ici c'est ça on va prendre donc l'exponentiel de z 2 x moins 1 sur sur x le voici voyez donc l'exponentiel de x moins 1 sur x x c'est un delta x dans notre calcul qui ne servient même c'est la variable d'accord va tendre vers 1 lorsque x tend vers 0

notes

résumé

14m 39s



ok donc maintenant cette limite là vaut 1 donc et sans surprise la dérivé de l'exponentiel c'est l'exponentiel elle-même d'accord c'est même une des définitions possibles de l'exponentiel donc la dérivé de l'exponentiel de x par rapport à x c'est l'exponentiel de x dans quelques instants on calculera la dérivé de l'exponentiel d'une fonction de x là c'est un tout petit peu plus compliqué d'accord la fonction pouvant être par exemple un moins x carré qui serait une gaussienne

notes

résumé

15m 23s

d'accord voilà alors faisons quelque chose d'analogue maintenant pour le logarithm on va calculer la dérivé du logarithm naturel le logarithm naturel d'un rapport de 2 nombres à sur b c'est la différence entre les logarithm naturels de ces nombres c'est log naturel de A moins log naturel de B d'accord alors on va prendre une une fonction de x qui est log de x où x est défini comme étant un réel strictement positif ce qui permet d'avoir un domaine de définition cohérent pour le logarithm d'accord on va écrire la dérivé du logarithm explicitement c'est la limite de delta x tant vers 0 de quoi et bien du logarithm naturel de x plus delta x moins le log naturel de x le tout divisé par delta x d'accord bon alors ça si on peut le remettre un tout petit peu en forme grâce à l'identité logarithmique on va écrire la différence des log comme le log du rapport on aura en facteur 1 sur delta x fois le logarithm naturel de x plus delta x divisé par x d'accord et alors là on va exploiter le fait qu'on a un domaine de définition particulier où x est strictement positif donc si on prend la limite de delta x qui tend vers 0 c'est équivalent à prendre la limite de delta x divisé par x qui tend vers 0 parce que et c'est essentiel x et réel est strictement positif d'accord donc on va pouvoir écrire ceci comme la limite de delta x divisé par x qui tend vers 0 et puis au passage dans notre facteur on va multiplier l'énumérateur par x se faisant globalement faut diviser par x d'accord on aura j'ai pas laissé assez d'espace excusez moi je vais déplacer un tout petit peu on a ici le logarithm naturel de x plus delta x sur x qui est évidemment 1 plus delta x sur x

notes

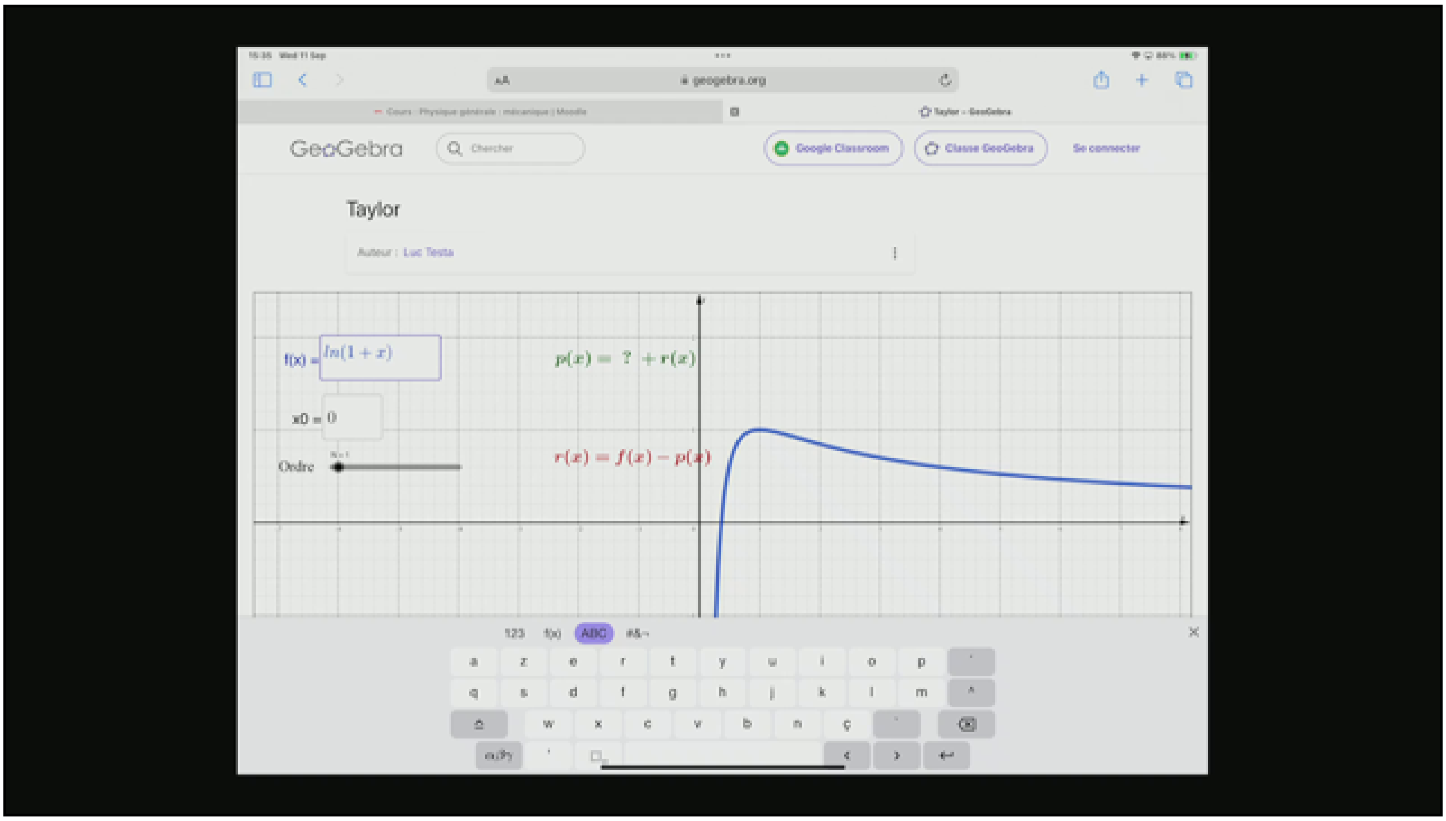
résumé

16m 1s

quelle est la structure qui apparaissent prenez le delta x sur x comme étant une variable par exemple y d'accord on se retrouve donc avec une limite qui est la suivante la limite de y qui tend vers 0 de quoi du logarithm de 1 plus y divisé par y question

notes

résumé

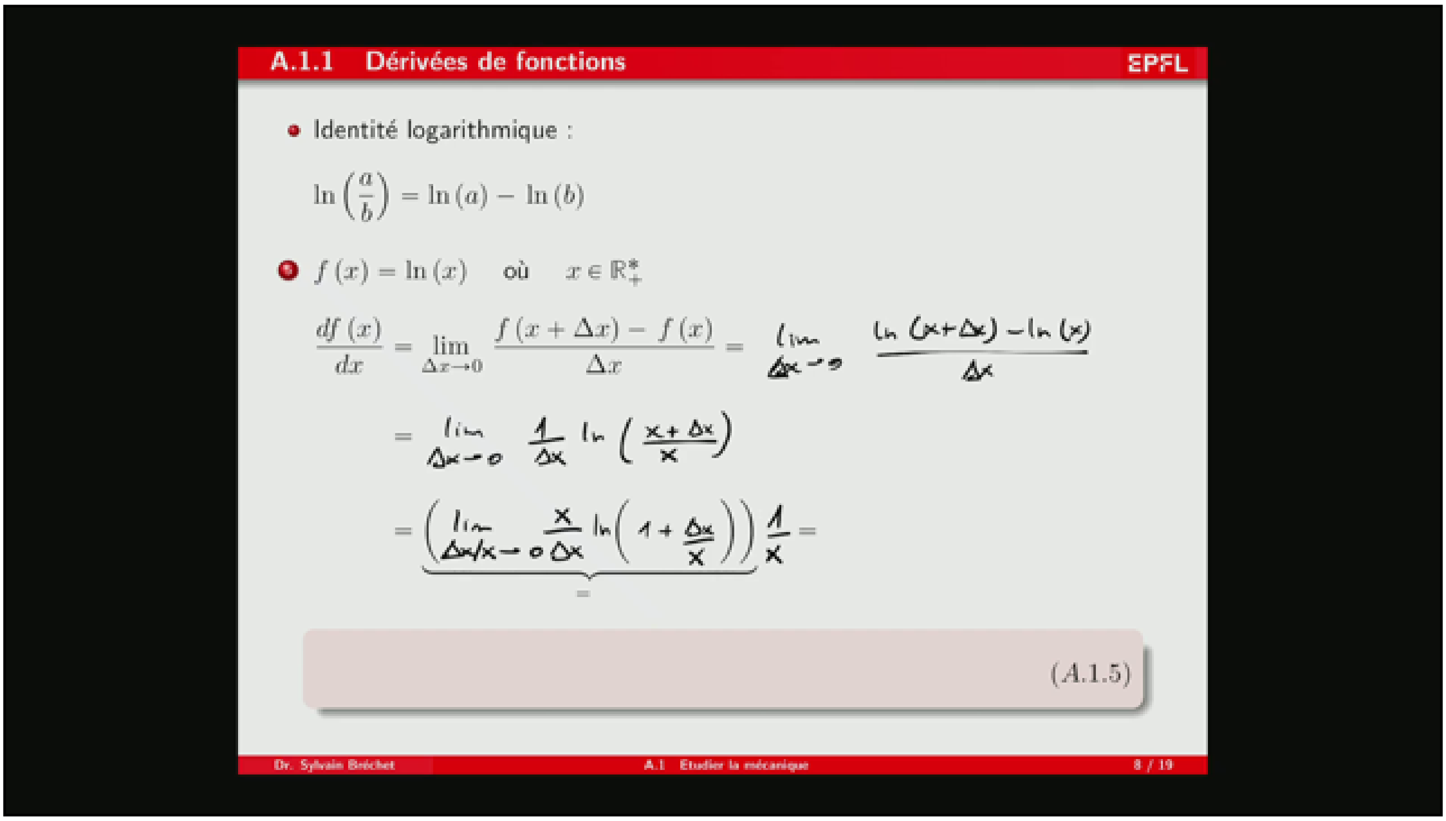


c'est que vos c'est limite quand alors le y on va le rebaptiser x et on va regarder ce que ça donne donc nous ce qui nous intéresse c'est le logarithm naturel de x plus 1 alors hop plus 1 divisé par x alors j'ai du mal faire mon opération non voilà voilà le problème c'est que le 1 c'est pas mis au bon endroit autant pour moi alors c'est mal écrit exactement c'était le logarithm naturel je dois écrire dans l'autre sens en disant que cette 1 plus x on va y arriver voilà et puis globalement

notes

résumé

18m 24s

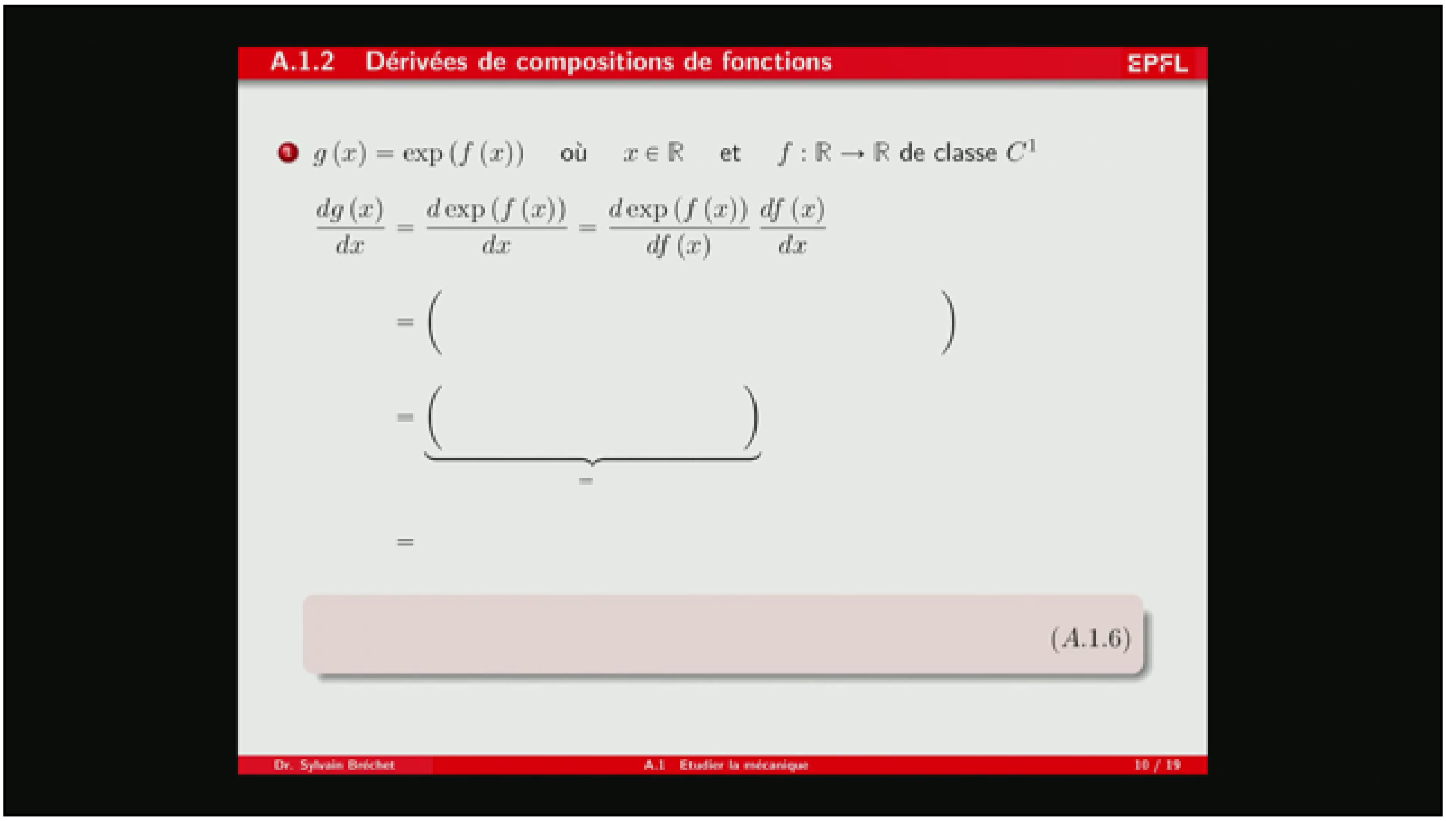


on va diviser le tout hop par x voilà ça c'est ce qu'on devait obtenir d'accord donc si vous regardez le comportement dans la limite ou extens vers 0 qui est dans notre développement

notes

résumé

19m 13s

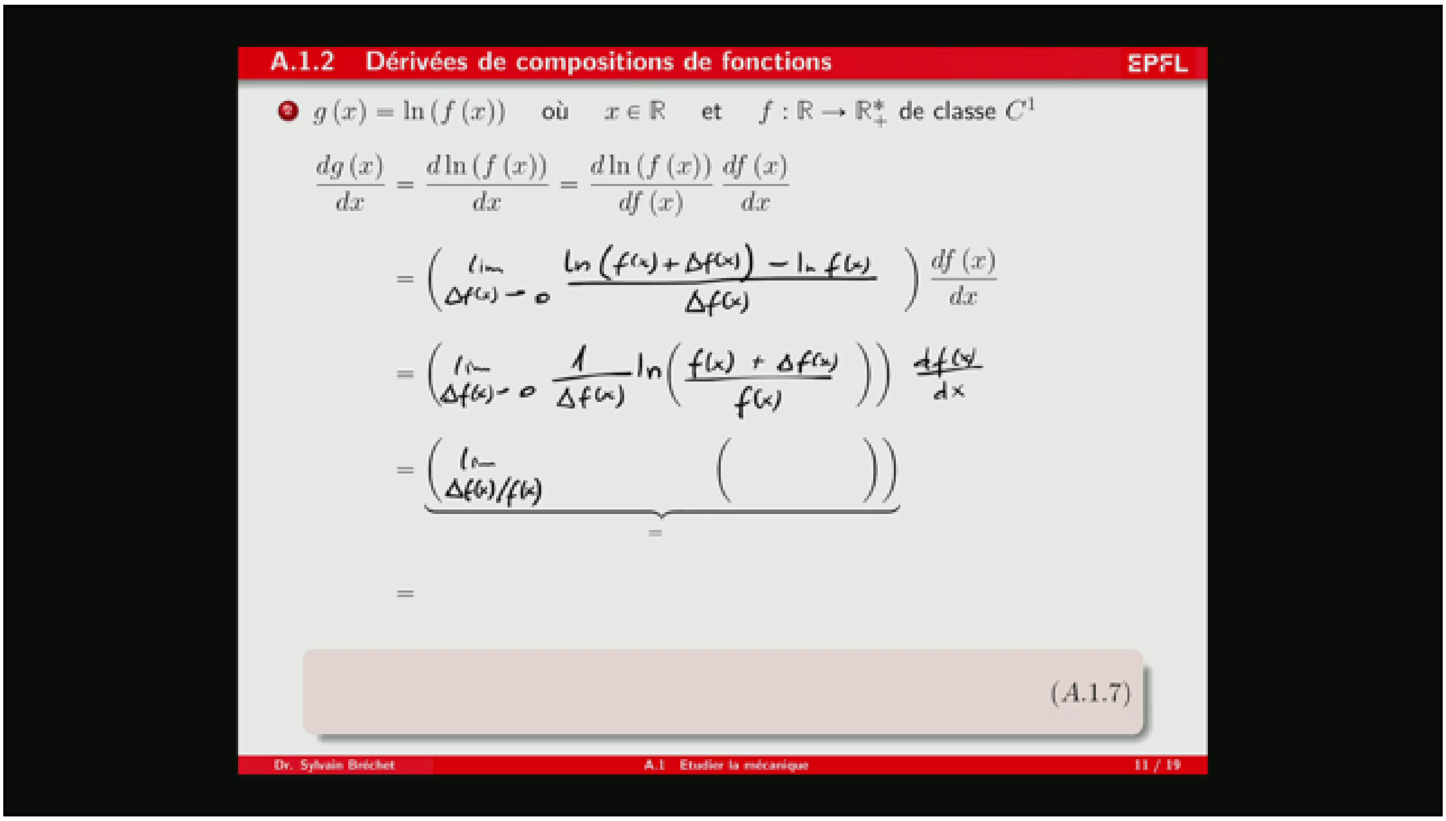


mathématique le delta x sur x d'accord ça tend vers 1 très bien donc maintenant cette limite tend vers 1 et donc le résultat de la dérivé du logarithm de x par rapport à x c'est bien un sur x ok donc la dérivé du logarithm naturel de x par rapport à x c'est un sur x alors on peut compliqué un peu la donne et c'est ce qu'on va faire tout de suite ça serait si simple si c'était

notes

résumé

19m 35s

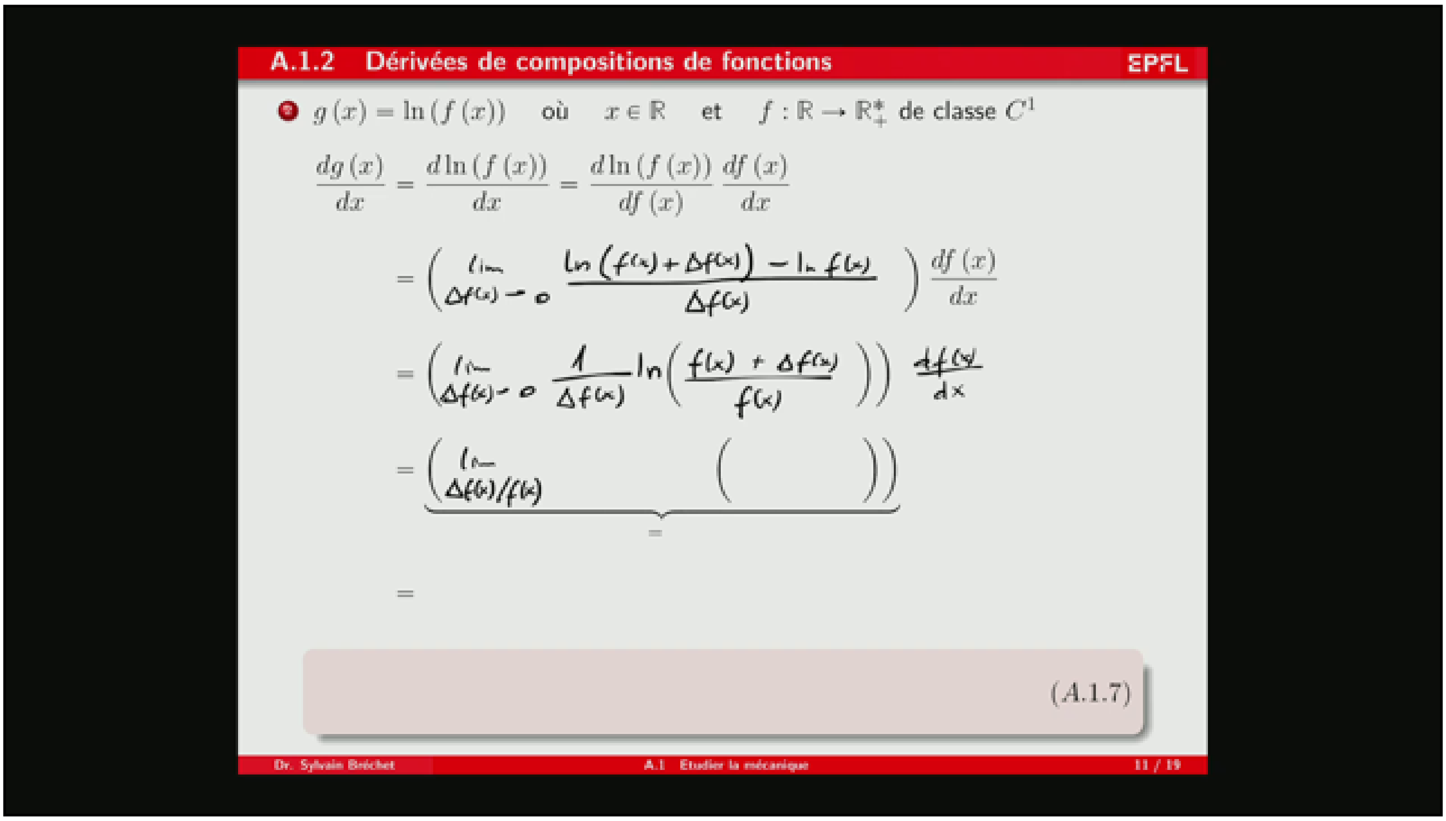


qu'une simple fonction de x c'est plus intéressant si on a des compositions de fonctions de x d'accord alors au lieu de prendre une fonction qui est l'exponentiel de x on va prendre une fonction qui est l'exponentiel d'un argument qui est elle-même une fonction de x d'accord alors on supposera que la fonction de x est une fonction de classe c1 il doit être dérivable en tout cas une fois d'accord continue évidemment ok et que x est tout simplement un nombre l'accord donc on applique la définition de la dérivé d'une composition de fonctions d'accord la dérivé de g de x par rapport à x c'est quoi eh bien c'est la dérivé de l'exponentiel de x par rapport à x on a la fonction externe qui est l'exponentiel qu'on va dans un premier temps dérivé par rapport à son argument qui est la fonction interne f d'accord et on va multiplier ceci par la dérivé interne qui est la dérivé de f par rapport à x alors on va écrire si vous voulez les mêmes limites que tout à l'heure sauf que lieu que la variable soit x la variable ici quand on prend la fonction externe c'est la fonction interne cf donc on aura la limite de delta f de x qui est envers zéro de l'exponentiel de f de x plus delta f de x moins l'exponentiel de f de x de toutes divisé par delta f de x puis il faut pas oublier qu'on a encore en facteur la dérivé interne de f par rapport à x ok alors là on a l'exponentiel d'une somme de deux termes la fonction f et sa variation delta f d'accord alors on va pouvoir écrire l'exponentiel de la somme comme le produit des exponentiels on aura notre limite de delta f de x qui est envers zéro de l'exponentiel de delta f de x moins un le toutes

notes

résumé

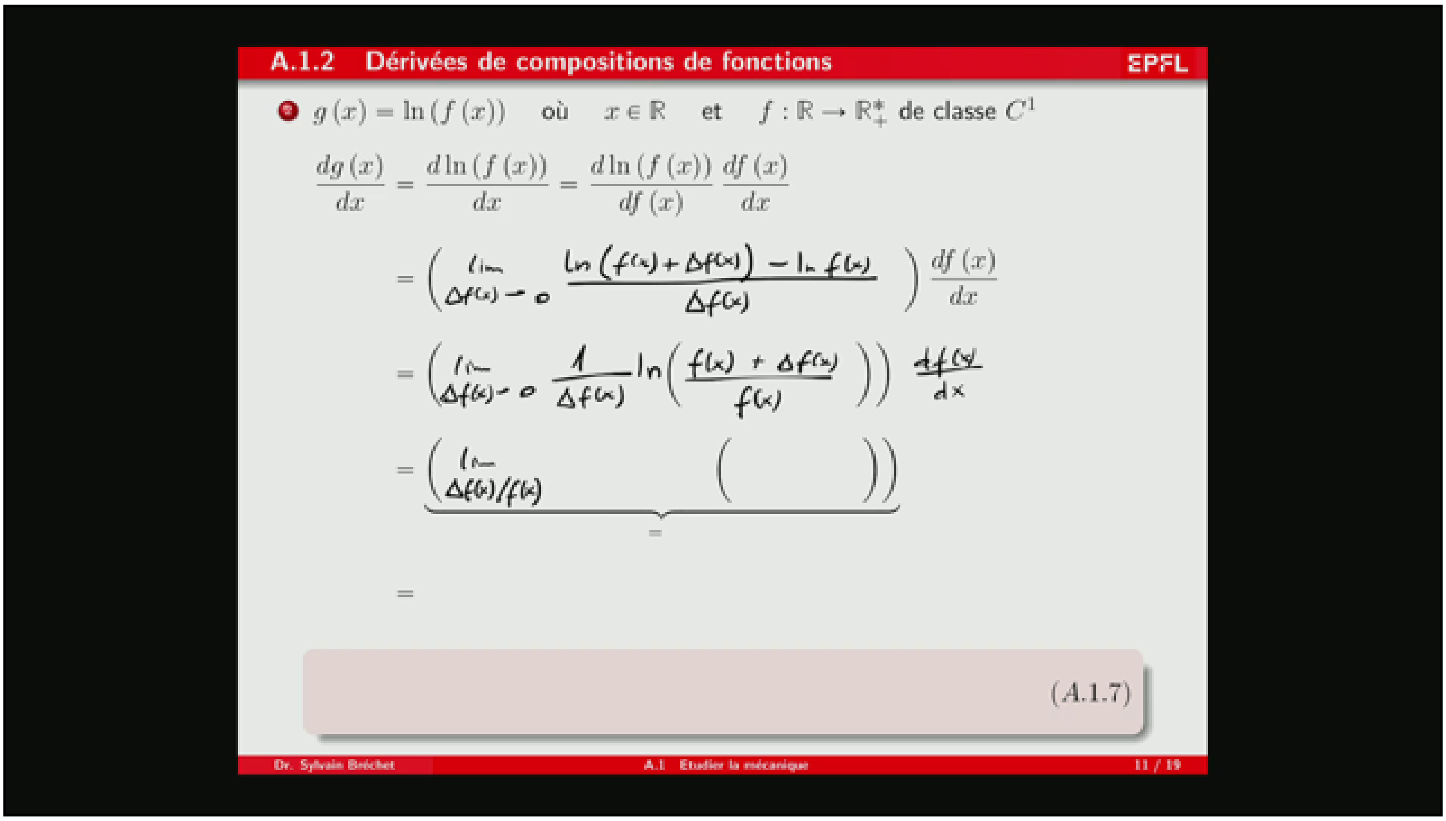
19m 57s



divisé par delta f de x d'accord alors c'est le même comportement que tout à l'heure sauf que x devient maintenant f pour les mêmes raisons que tout à l'heure cette limite envers un on a en facteur l'exponentiel de f de x ainsi que la dérivé interne de f par rapport à x et donc on peut récrire ceci comme le produit de la dérivé interne de f par rapport à x fois l'exponentiel d'accord de f de x donc pratiquement la dérivé de l'exponentiel de f de x par rapport à x et bien c'est le produit de la dérivé interne celle de f par rapport à x fois la dérivé externe qui est tout simplement l'exponentiel elle même l'exponentiel de la fonction d'accord prenons un exemple prenons f de x comme étant moins x carré c'est une grossienne particulière d'accord alors la dérivé de moins x carré par rapport à x c'est exactement c'est moins de 6 donc le résultat serait moins de 6 fois l'exponentiel de moins x carré ça c'est un exemple il y en a plein d'autres quand alors on va faire le même exercice maintenant avec la fonction logarithm naturelle quand c'est un petit peu plus compliqué faire attention puisqu'on a une fonction externe g de x qui est logarithm de la fonction f de x quand x est un nombre réel par contre il faut que l'argument du logarithm soit un nombre réel strictement positif donc la fonction f est une fonction à valeur réelle strictement positive qui doit être continue et en tout cas une fois dériveable d'accord on applique la logique de la dérivée d'une composition de fonction on dérive le logarithm de la fonction par rapport à x en dérivant le logarithm de la fonction par rapport à f qui est la dérivée externe multiplié par la dérivée interne d'accord alors on a la même structure que quand on

notes

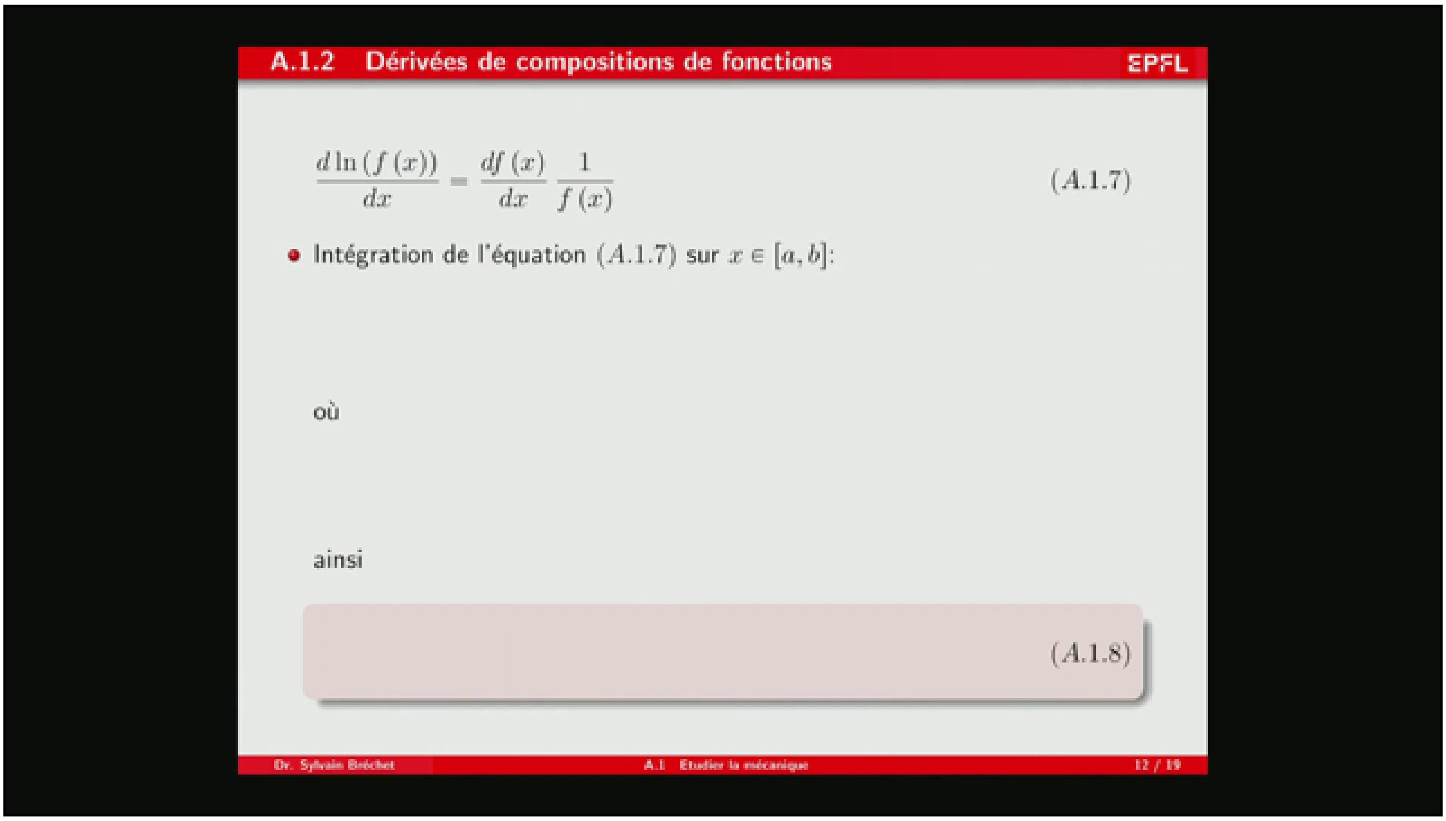
résumé



avait le log de x on remplace x par f donc on aura la limite de delta f de x qui est envers zéro du logarithm naturel de f de x plus delta f de x d'accord moins le logarithm naturel de f de x de toutes divisé par delta f de x évidemment on a en facteur la dérivée interne d'accord on va maintenant exploiter le fait que la différence des logarithm naturels c'est logarete naturelle du rapport on va tout de suite écrire ce logarithm naturel celui de f de x plus delta f de x sur f de x d'accord en facteur on a notre limite de delta f de x qui tend vers zéro ainsi que un sur delta f de x faut pas oublier à droite la dérivée interne quand comme on l'a fait tout à l'heure pour le log de x on peut étant donné que la fonction f est une fonction à valeur réelle strictement positive on peut prendre la limite non pas de delta f de x mais de delta f de x

notes

résumé

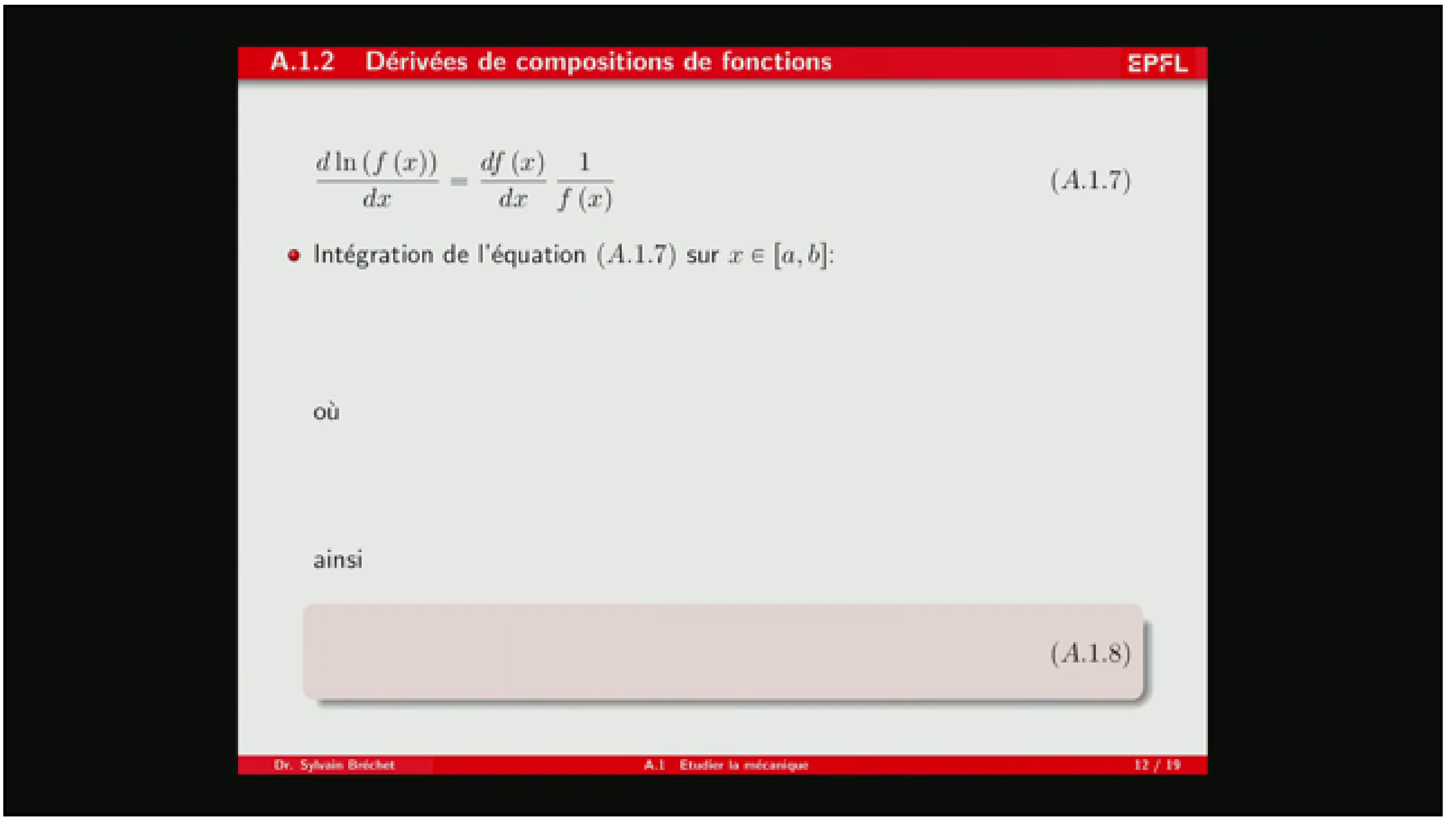


divisé par f de x sachant que les valeurs de f de x seront réelles et strictement positive donc il n'y a pas de soucis ok on va au passage multiplier le numérateur par f de x on a de nominateur delta f de x et donc faudra pas oublier de mettre à droite l'inverse de f de x ainsi que la dérivée interne quand on a le logarithm de 1 plus delta f de x sur f de x quand pour les mêmes raisons que tout à l'heure cette limite va tendre vers donc on se retrouve avec la dérivée interne qui multiplie l'inverse de la fonction de x d'accord alors ça ça va être très intéressant c'est en fait un travail préparatoire à une intégration qu'on va faire sur le stride suivant d'accord parce que ce qu'on vient de montrer c'est que la dérivée du logarithm naturel de f de x par rapport à x c'est en fait le produit de la dérivée interne celle de f par rapport à x fois la dérivée externe qui est tout simplement insure la fonction en question d'accord alors pourquoi c'est intéressant parce que on va prendre ce résultat et ce résultat on va le sommet on va le sommet de manière continue c'est à dire qu'on va l'intégrer oui oui oui alors c'est une bonne question que vous posez là si vous regardez tout en haut à droite vous voyez que la fonction f est une fonction d'accord donc l'ensemble d'arrivée et l'ensemble des nombres réels strictement positifs d'accord donc si vous divisez par un f de x vous allez diviser par un nombre strictement positif d'accord donc en fait lorsque j'ai oublié de mettre quittant vers 0 excusez moi c'est un oubli de ma part donc le fait de faire tendre delta f de x vers 0 ou de faire tendre un multiple positif de delta f de x

notes

résumé

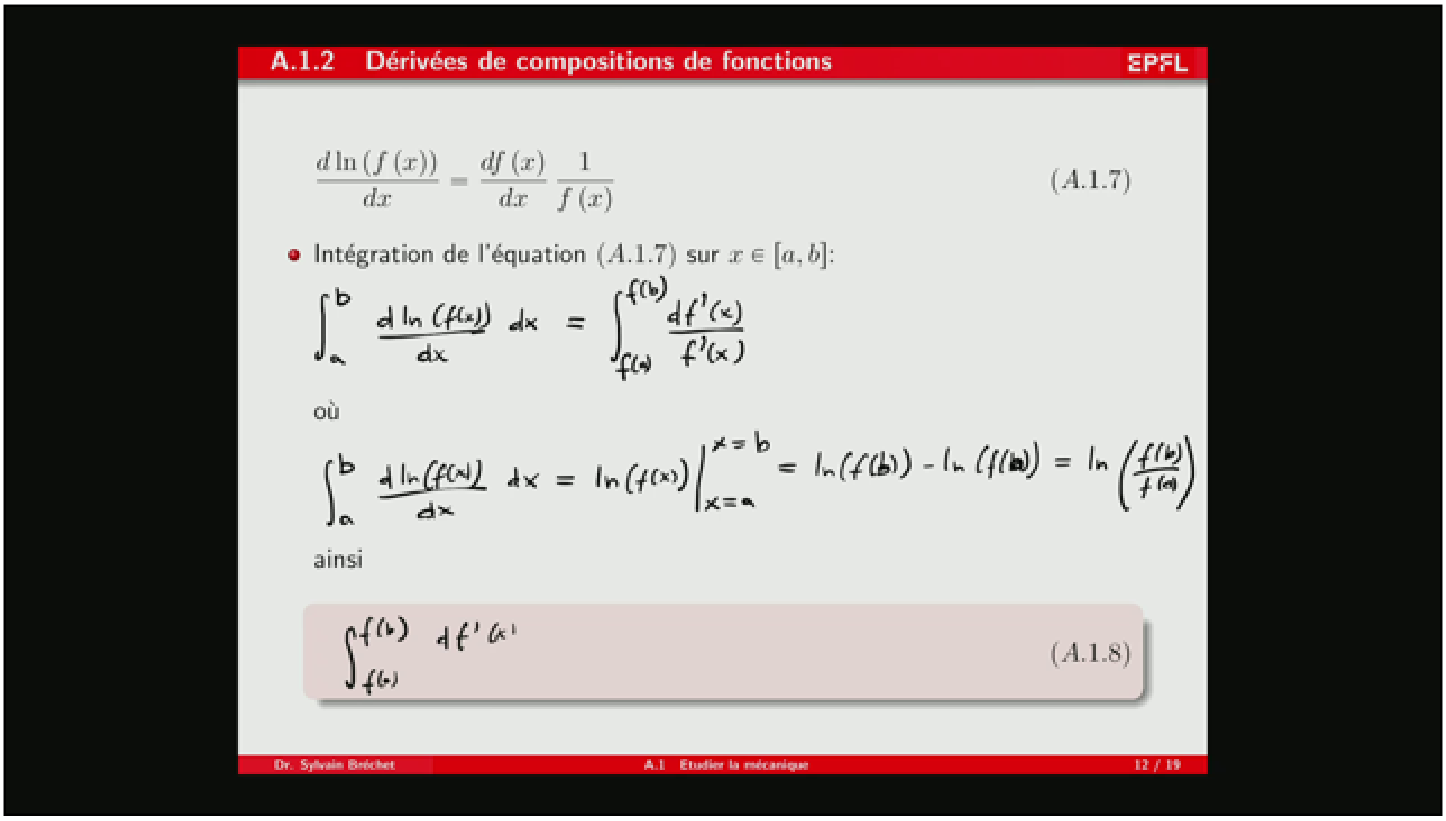
25m 37s



vers 0 sera la même chose d'accord c'est pour ça qu'on a le droit de faire ceci et c'est pour ça qu'on retrouve cette structure qui nous permet alors d'avoir une limite connue pour le logarithm et de calculer le résultat d'accord quittant vers 1 puisque la structure si vous prenez delta f sur f comme étant une variable y vous avez le logarithm naturel de 1 plus y divisé par y et vous prenez la limite de y qui tend vers 0 ce qu'on vient de voir ensemble graphiquement avant d'accord alors pourquoi

notes

résumé

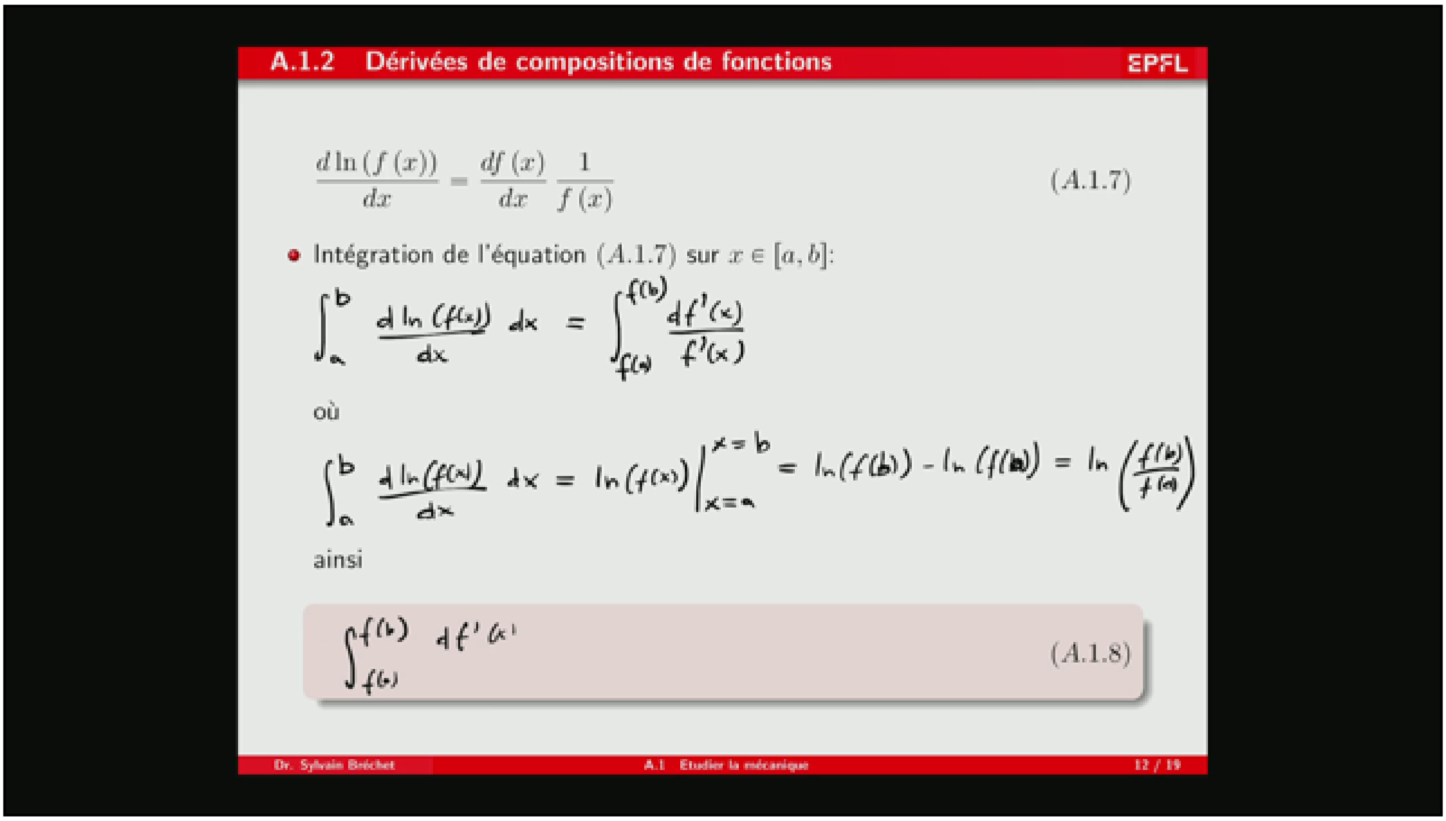


est ce qu'on fait ça parce que maintenant on va donc pouvoir semer de manière continue le résultat qui est ici d'accord et donc on va en fait intégrer cette équation bon alors on va introduire le symbole intégrale on va intégrer sur l'intervalle qui va de A à B donc les bornes d'intégration seront A et B et ce qu'on va intégrer c'est la dérivée du logarithm de f de x par rapport à x et donc quand on intègre on va multiplier par des x très bien dans le monde de droite on aura aussi une intégrale pour l'instant on va pas encore tout de suite indiquer les bornes parce que on va prendre le monde de droite qui est ici qu'on va multiplier par des x donc les dx vont se simplifier d'accord qu'est ce qui va nous rester il va nous rester un df de x divisé par f de x d'accord que seront les bornes ici et bien c'est pas la variable qu'on intègre c'est la fonction interne comme variable qu'on intègre donc il faudra évaluer au bornes la fonction f pour les valeurs correspondantes de x qui sont A et B donc on va évaluer en f de A ainsi qu'en f de B et là on a un petit souci technique mais on va rapidement le résoudre quand on intègre il faut que la variable d'intégration soit différente des bornes qu'on s'est choisis sinon c'est une tautologie d'accord si vous voulez c'est une variable muette si vous prenez un programme informatique vous sommez c'est une variable muette sur laquelle vous allez se me donc pour l'indiquer on va mettre des primes vous pouvez noter en marge attention c'est important les primes sont pas déderrivés ça n'a rien à voir c'est juste pour dire que c'est une autre fonction d'une autre variable d'accord donc on met ici un prime pour indiquer ceci d'accord autrement

notes

résumé

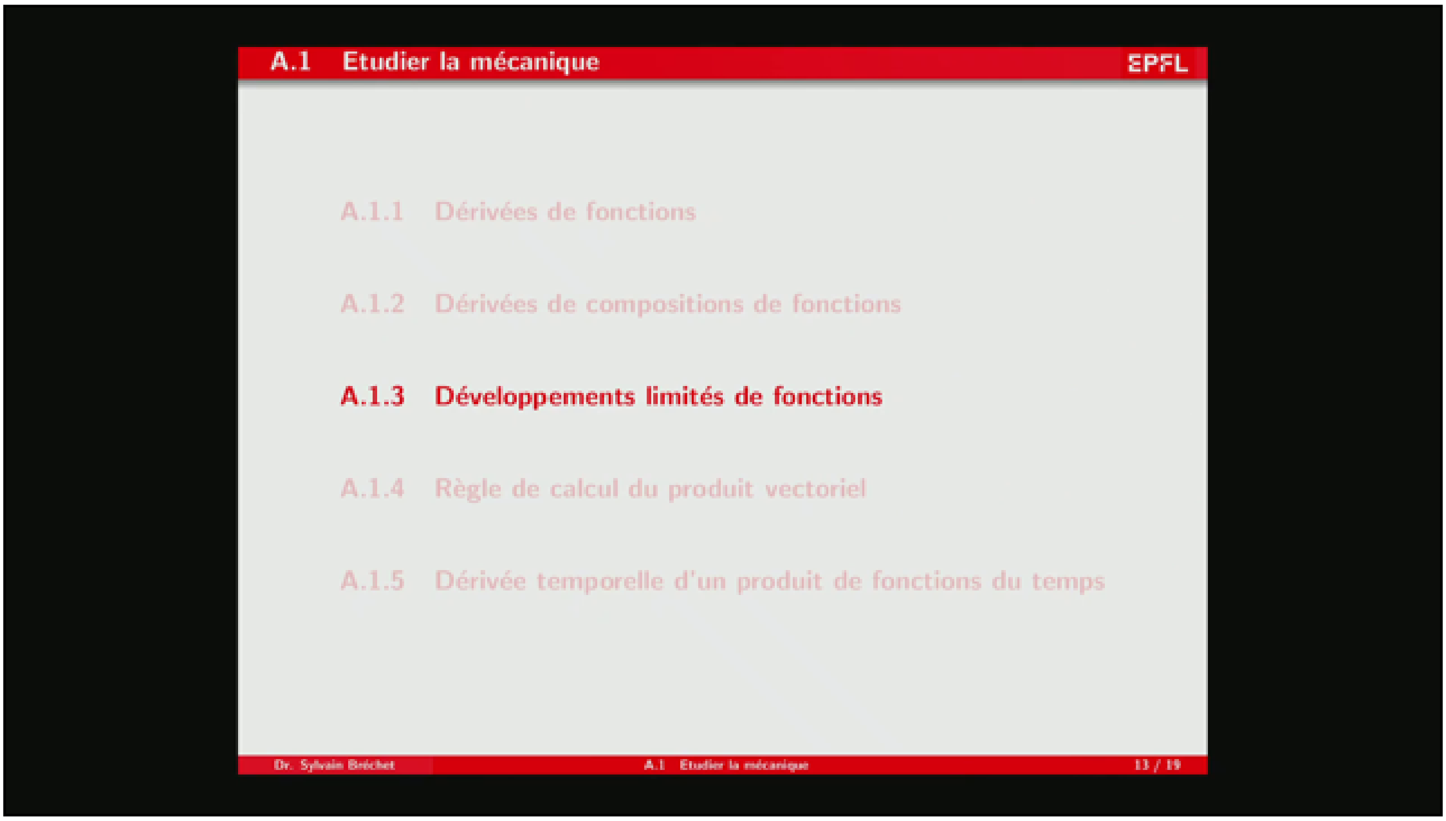
28m 22s



la grandeur qui apparaît dans l'intégrant serait la même que celle qui apparaît au bornes et ça ça serait une tautologie on aurait pu l'appeler f till on aurait pu l'appeler f chapeau on va simplement la noter f prime c'est pas une dérivée je répète c'est pas une dérivée d'accord bon alors maintenant pour trouver ce résultat puisque c'est celui ci auquel on sera confronté dans la résolution des équations différentielles d'accord et bien il faudra qu'on développe le manque de gauche donc on reprend l'intégral de ab de la dérivée du logarithm naturel de f de x par rapport à x fois d x et ça c'est quoi et bien le logarithm non le pardon l'intégral définit du la dérivée d'une fonction c'est tout simplement la fonction elle-même évaluée au bornes d'accord c'est le théorème de Riemann donc on a le logarithm naturel de f de x qu'on va évaluer au bornes c'est à dire entre x égal à et x égal b en d'autre termes on aura la différence entre le log de f de a et le log de f de b c'est le contraire de f de b moins f de a excusez moi c'est la bande supérieure moi la bande à ferrières toujours ok la différence des logarithm naturels c'est le logarithm naturel du rapport ce sera donc le logarithm naturel du rapport de f de b sur f de a et donc on en conclut en comparant ces expressions que l'intégral de f de a à

notes

résumé

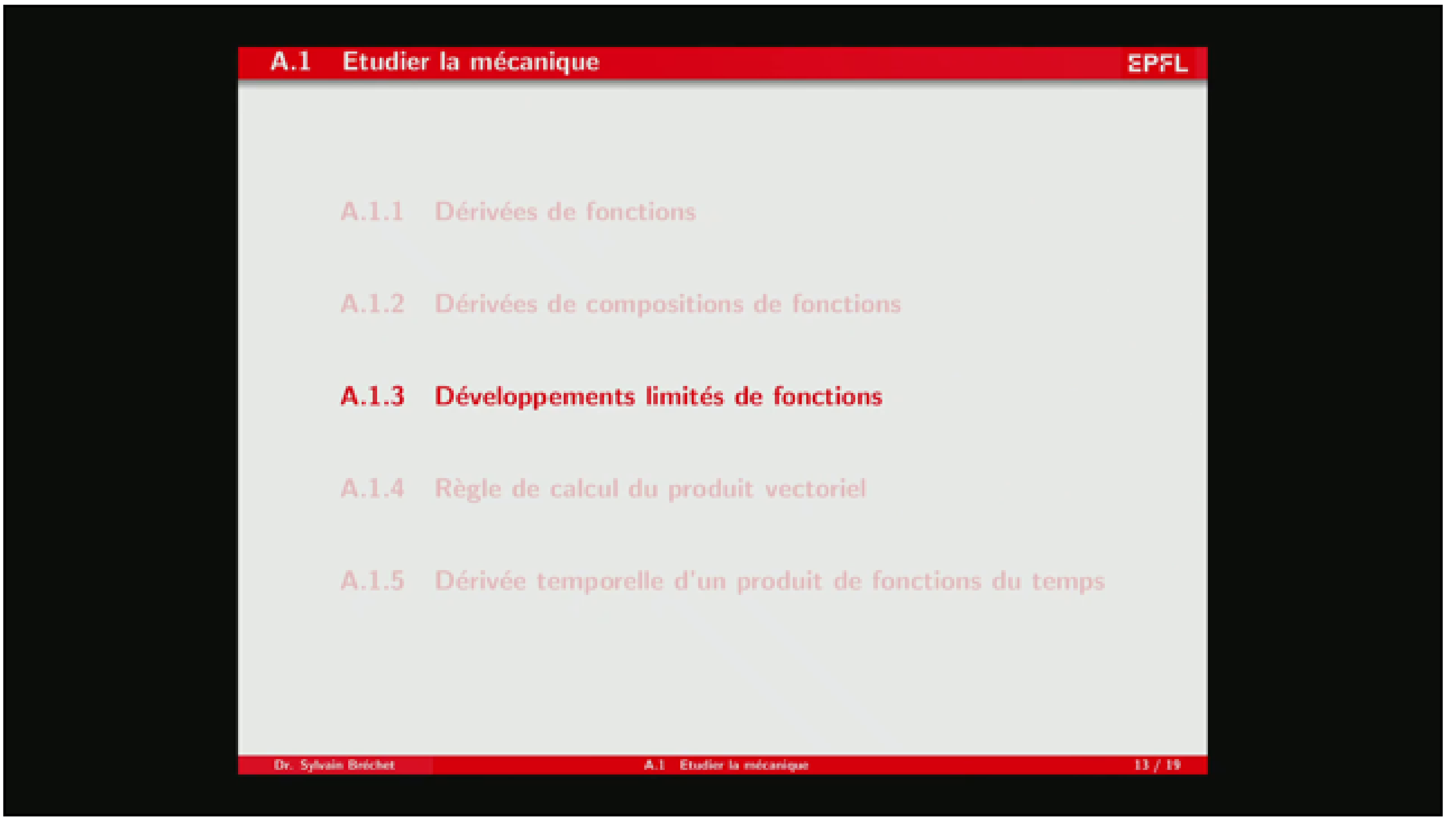


f de b de la variation infinitésimale d'une fonction f variable x divisé par cette fonction elle-même ce n'est rien d'autre que le logarithm naturel du rapport de f évalué en b sur f évalué en a d'accord et ça ça sera clé pour trouver les solutions des équations différentielles du premier rhum d'accord lorsqu'on aura un mouvement balistique avec frottement on devra passer par là pour trouver le résultat d'accord oui alors pour quand on passe de l'intégral de gauche à l'intégral de droite oui en haut ici oui ah pourquoi est ce qu'on a mis les primes alors c'est ce que j'ai dit tout à l'heure c'est qu'en réalité comme c'est un intégrant si vous intégrer votre fonction et que vous l'évaluez au borde qui sont si vous voulez le même symbole que l'intégrant lui-même c'est une tautologie au sens mathématique d'accord il faut bien les séparer vous avez une valeur à laquelle vous évaluez une grandeur donnée qui est différente donc il faut le noter pour le noter on va simplement mettre un prix c'est juste une notation d'accord mettez un petit signe attention d'accord attention ceci n'est pas une dérivée d'accord c'est juste une autre fonction voilà je peux juste le mettre entre parenthèses ok alors c'est une fonction sur laquelle on somme et le résultat d'autecette somme est évalué en une fonction qui est la fonction est ce qu'on cherche d'accord c'est vous auriez pu appeler f prime la fonction mickey ou la fonction donald oui alors au final quand vous regardez le résultat d'intégral qui est ici les f que vous avez là sont les mêmes en revanche ceci est une fonction muette sur laquelle on somme d'accord c'est juste une distinction pour ne pas commettre de si vous voulez de de plaies au nasm mathématique d'avoir une fonction qu'on évalue en termes de la fonction elle même ce qui aura aucun sens d'accord

notes

résumé

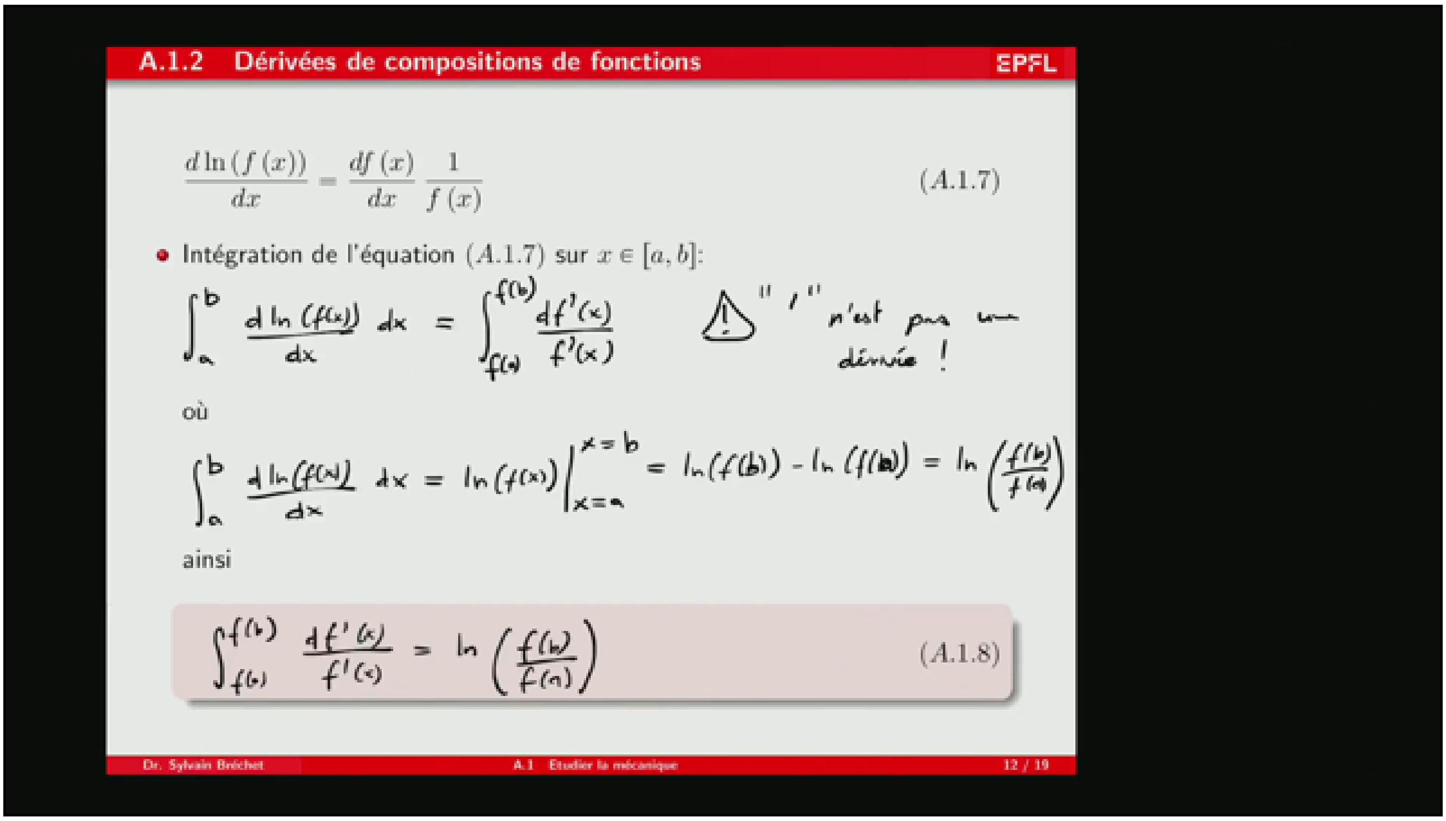
32m 1s



voilà alors maintenant

notes

résumé

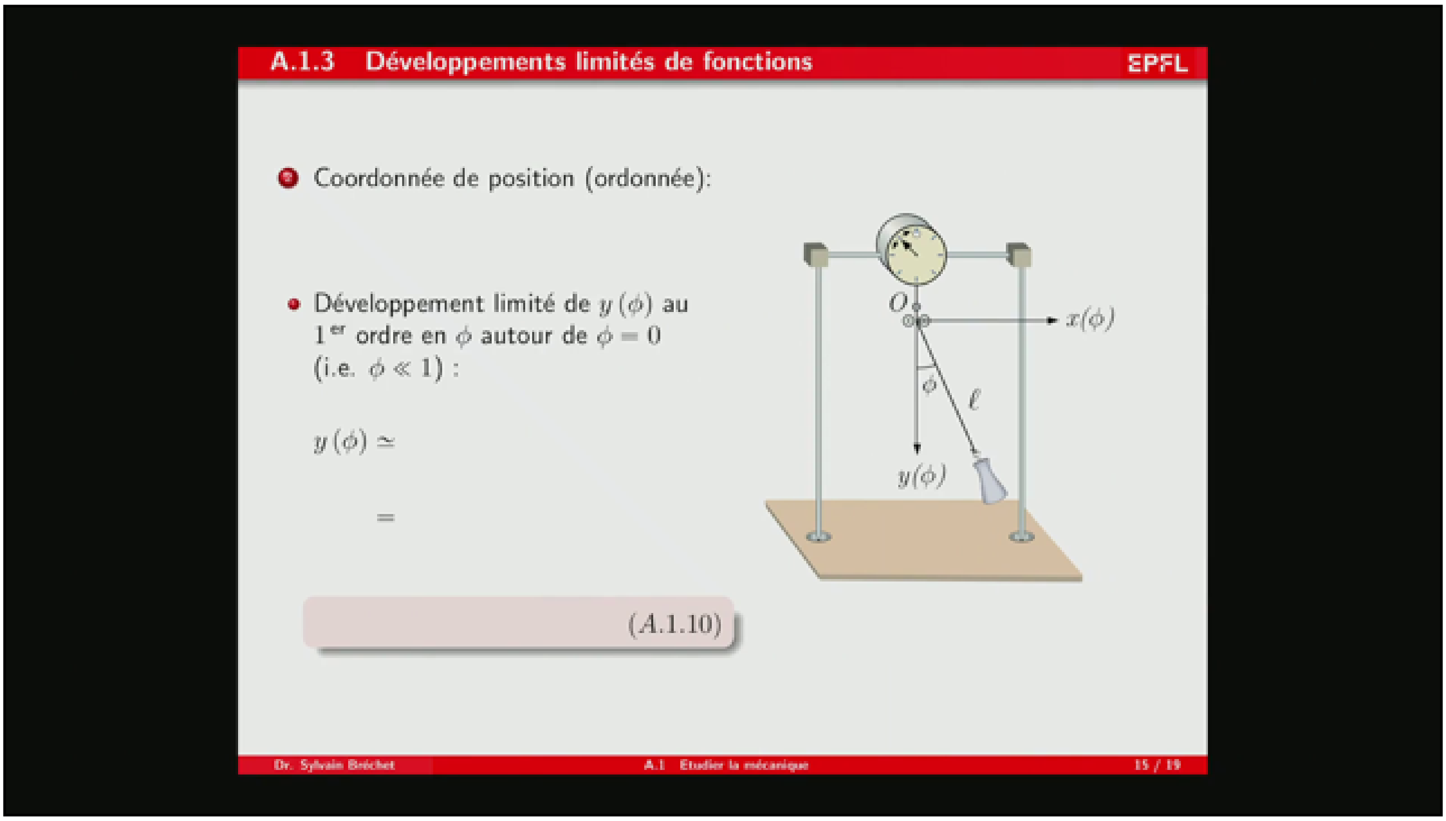


qu'on a fait ceci oui oui alors vous parlez de quelle équation je me suis je vous entend mal

notes

résumé

34m 31s

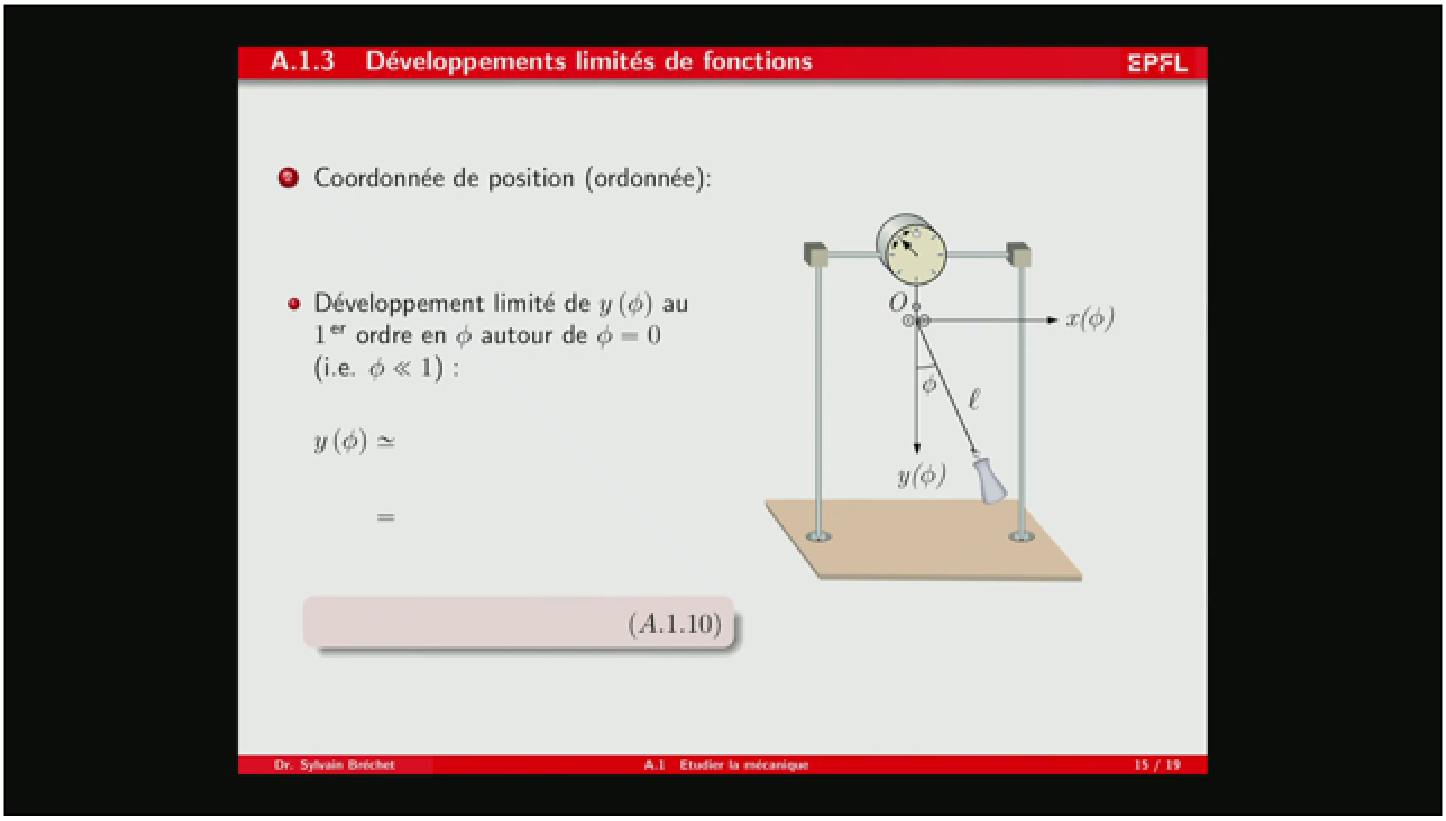


oui oui j'aurais en fait je les ai laissé pour la raison suivante c'est que quand on fait de l'intégration en général on a la dérivé de la fonction fois la variation infinitimal de la variable seulement en faisant l'opération de les enlever à droite étant donné qu'on a un dx au dénominateur on voit que ce sur quoi on va sommer c'est pas la variable elle même c'est carrément la fonction qui devient la nouvelle variable d'accord c'est pas un dx sur x qu'on a auquel cas le résultat serait un log de x c'est un df de x sur f de x donc là on a mis des primes donc si vous voulez la primitive serait le logarithm d'accord de f prime à une constante près qu'on évalue au bon ce qui donne le log de f de b moins le log de f de a d'accord voilà alors on va maintenant prendre des exemples de développement limité quand et puis comme exemple on va se baser sur un pendule faut imaginer que vous avez une masse qui est suspendue à un fil et puis la masse est l'os bon la masse est l'osie comme ça quand suspendu un fil bon et ce qui nous intéresse c'est le mouvement de cette masse suspendu un fil lorsque l'angle que fait le fil avec la verticale qui est cet angle fil est petit d'accord est ce qu'on peut trouver une approximation qui me décrit ce qui se passe clairement on peut faire la trigonométrie pour trouver les composantes le long de l'axe des absces x et de l'axe des ordonnées y d'accord du point d'attache ici de notre masse alors commençons par écrire explicitement la coordonnée d'apsis qui dépend de l'angle fil donc on prend le triangle grecque tang qui est ici faut toujours prendre un triangle rectangle dont l'hypothénie correspond à la grandeur qu'on veut projeter d'accord et on

notes

résumé

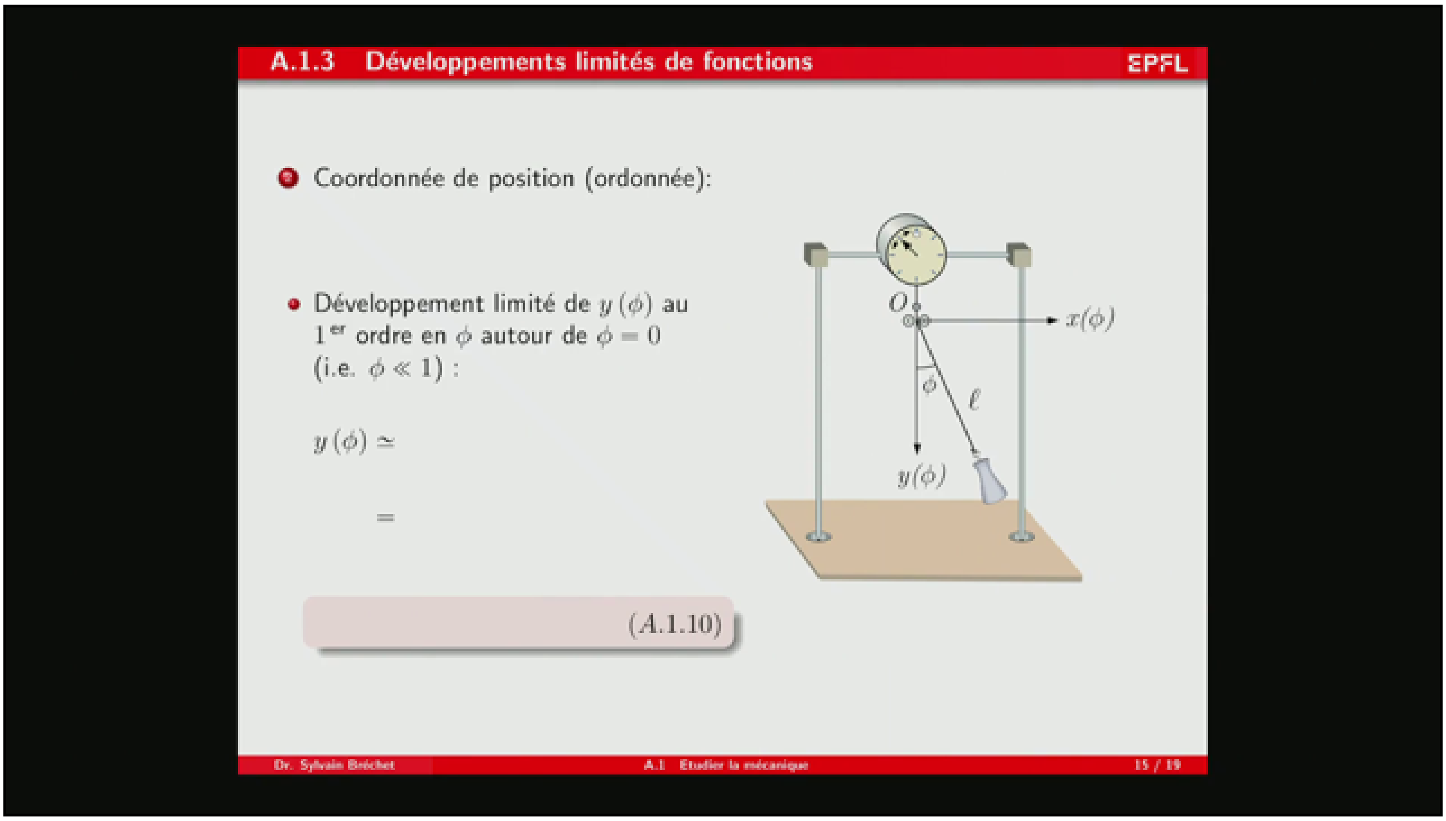
34m 42s



projette sur le cathète avant d'abord projeter sur le cathète horizontal le cathète horizontal qui est opposé à l'angle fil d'accord donc on va se retrouver avec la longueur du fil qui est l multiplié par le six de fil ok maintenant on fait un développement limité on considère que l'angle est petit maintenant si l'angle est petit en première approximation on va pouvoir décrire x évalué en fi comme x évalué en zéro plus une première correction d'accord qui est la dérivée de x par rapport à fi évalué en zéro fois la variable elle-même qui est fi d'accord alors la dérivée du sinus par rapport à l'angle c'est quoi exactement c'est bien vous avez bien écouté donc on voudra le cos de zéro d'accord bon alors faut d'abord qu'on accrive x de zéro d'ailleurs qui est l fois le sinus de zéro ensuite on a la dérivée de x par rapport à fi en zéro qui est comme vous l'avez dit l fois le cos de fi on a multiplié par elle et donc c'est plus que le cos de fi c'est le cos de zéro voilà multiplié par fi et donc le sin de zéro c'est zéro le cos de zéro c'est 1 donc ceci se réduit à l fi c'est quoi l fi si je fais un petit dessin ici d'accord il faut imaginer le mouvement du pendule d'accord elle-fi c'est la longueur d'arc alors qu'est ce qu'on est en train de dire parce que c'est le produit du rayon foie l'angle ce qu'on est en train de dire c'est que si l'angle est petit d'accord la projection de la longueur d'arc sur l'axe horizontal correspond quasiment à la longueur d'arc c'est une approximation c'est développement limité qu'on vient de faire ensemble d'accord donc si x de fi est-elle que fi est petit x de fi donc la projection du fil long de l'axe horizontal c'est

notes

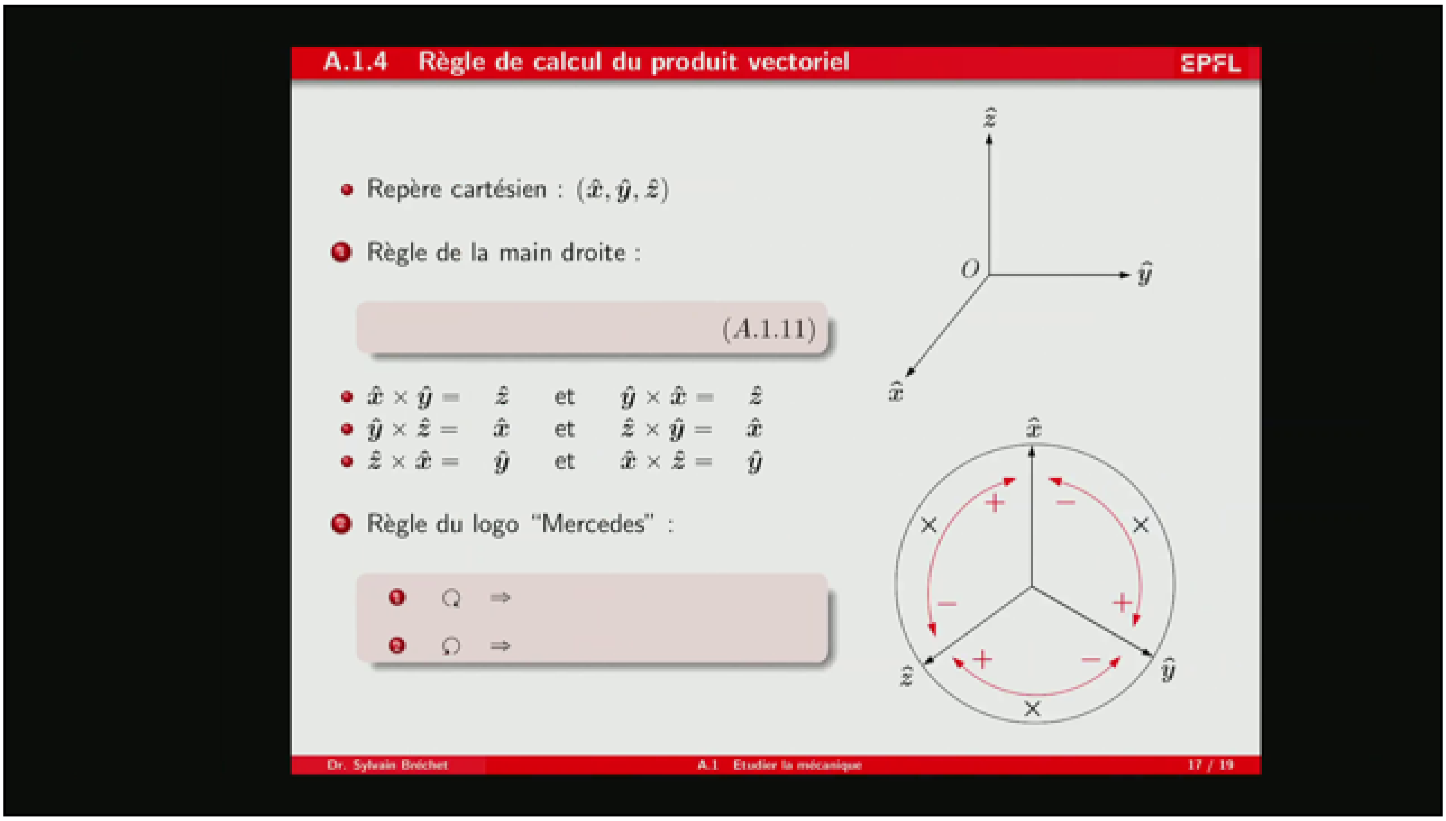
résumé



la longueur du fil fois l'angle de fi ceci est vrai que si l'angle de fi est suffisamment petit donc nettement plus petit que ok faisons la même chose maintenant pour la coordonnée verticale

notes

résumé

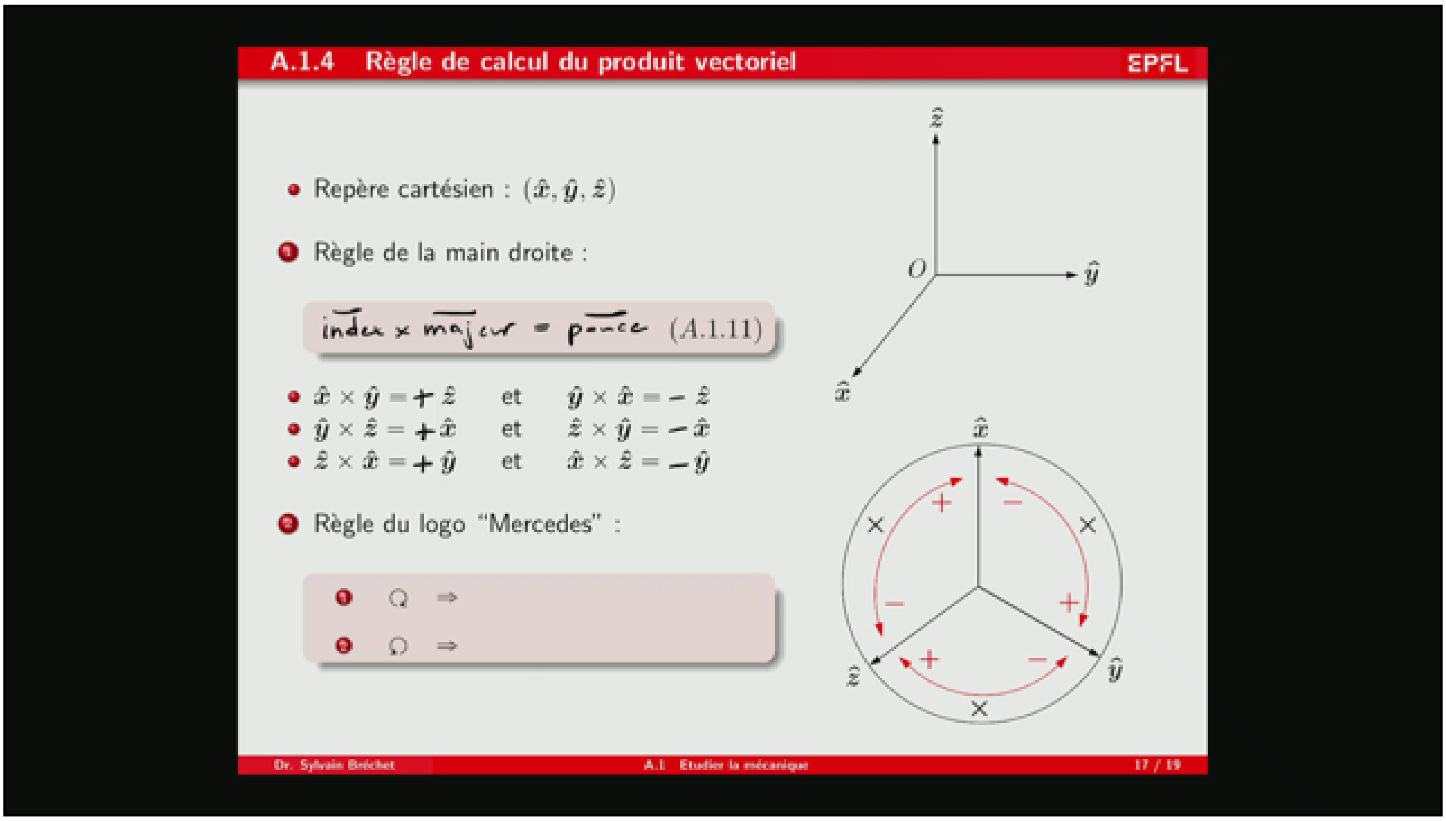


pour la coordonnée verticale si on reprend notre triangle rectum qui est ici on va maintenant projeter la longueur l du fil sur le cathète verticale ce qui fait intervenir le cathète qui est adjacent à l'angle fi c'est à dire le cosinus de l'angle fil on aura donc y de fi qui est la longueur l du fil multiplié par le cosinus de fi ok bon alors maintenant on aime regarder ce qui se passe lorsque fi est petit alors là on va voir une surprise parce que on va dans un premier temps regarder la valeur de y en zéro c'est déjà intuitivement ce que c'est ça va être elle évidemment va le montrer d'accord puis on aura également la dérivée de y par rapport à fi évalué en zéro multiplié par fi qui est la correction du premier ordre qui est proportionnelle à l'angle et la dérivée première d'accord prenons l y de zéro pardon qui est l fois le cosinus de zéro le cos de zéro c'est bien entendu un cordon et on ajoute à ceci la dérivée du cos de fi par rapport à fi qui est moins signes de fi qu'on évalue en zéro c'est moins le signe de zéro d'accord multiplié par fi on aura donc moins l fois le sinus de zéro fois fi alors si le zéro il est clair qu'il est nul donc ce qui va nous rester c'est elle ok en d'autres termes si l'angle est tout petit en première approximation la cordon est verticale c'est la longueur du fil d'accord ce qui paraît aussi assez raisonnable donc y de fi va être égal à peu près à elle c'est une constante si l'angle fi est suffisamment petit voilà alors j'aimerais maintenant vous montrer une

notes

résumé

39m 25s

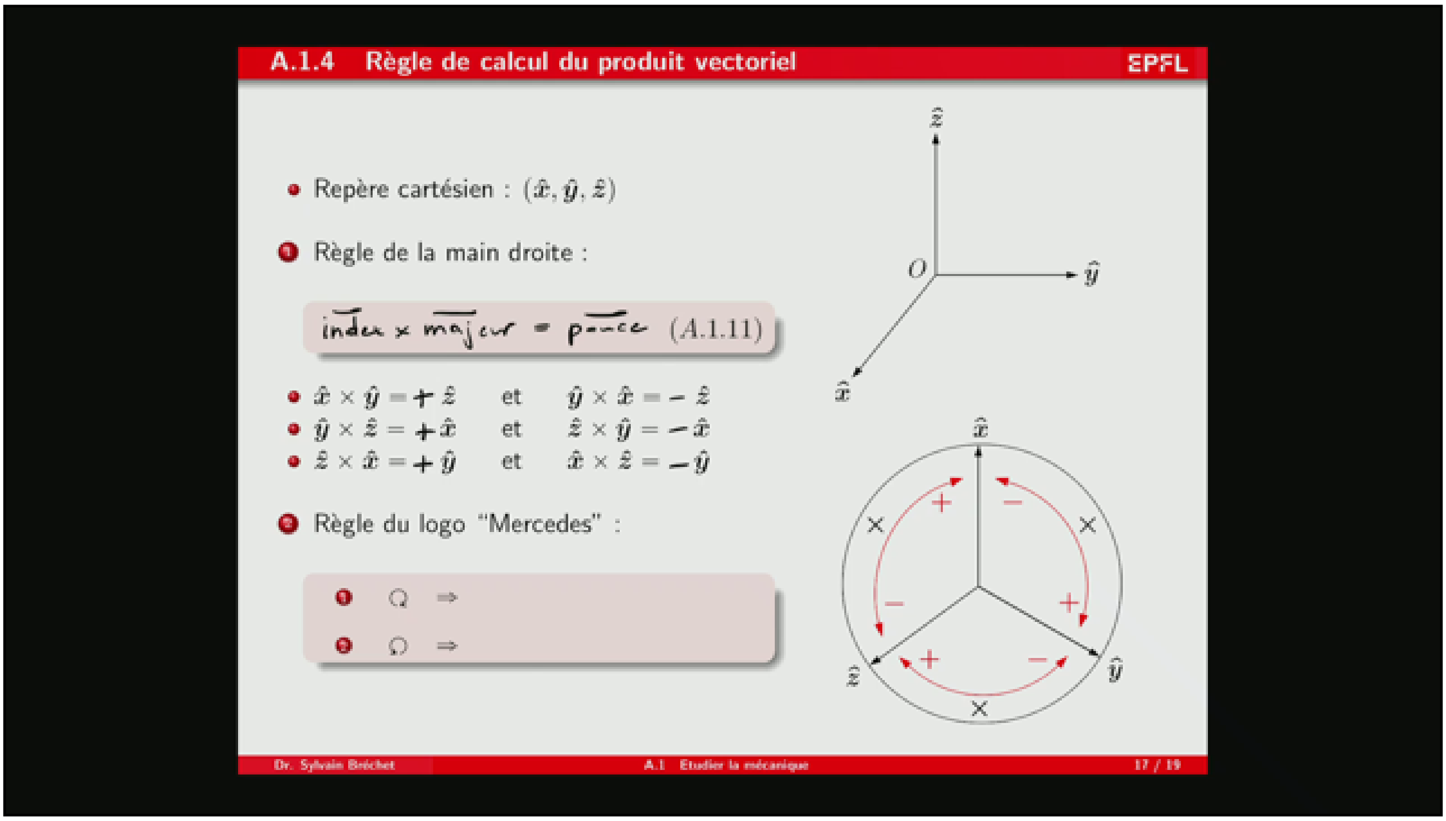


règle de calcul pour le produit vectoriel d'accord qui va être très très utile dans la pratique quand on doit multiplier deux vecteurs à l'aide d'un produit vectoriel ce qu'on fait dans la pratique c'est de multiplier les vecteurs unitaires qui apparaissent dans la décomposition de ces vecteurs chaque vecteur est une combinaison linéaire des vecteurs unitaires la question qui se pose c'est quel va être le produit vectoriel de deux vecteurs unitaires pris au hasard d'accord alors on va prendre un repère cartesien avec des vecteurs unitaires x chapeau y chapeau z chapeau d'accord alors la règle de la main droite nous donne l'orientation du vecteur qu'on obtient en alignant le premier vecteur le long d'index de la main droite le deuxième le long du majeur le résultat va bien entendu être orienté le long du pouce de la main droite c'est ça la règle de la main d'accord alors maintenant vous prenez deux vecteurs unitaires qui sont qui sont orthogonaux le produit de la norme des deux vecteurs unitaires c'est l'angle entre les vecteurs c'est p sur 2 son sinus vont donc 1 et donc la norme du vecteur obtenu par produit vectoriel de ces deux vecteurs unitaires quel qu'ils soient différents bien sûr doit être égal à 1 donc ce qui va nous rester c'est le troisième vecteur unitaire au signe près la question c'est c'est quoi le signe d'accord c'est la seule question qui reste donc pour le voir faut appliquer la règle de la main droite donc on se lance on aligne l'index selon x le majeur selon selon y d'accord et le pouce est orienté selon z qui est très bien ça donne un signe plus si on aligne l'index de la main droite selon y le majeur selon z et bien le pouce est orienté selon x si on aligne l'index de la main droite selon z le majeur selon x le pouce

notes

résumé

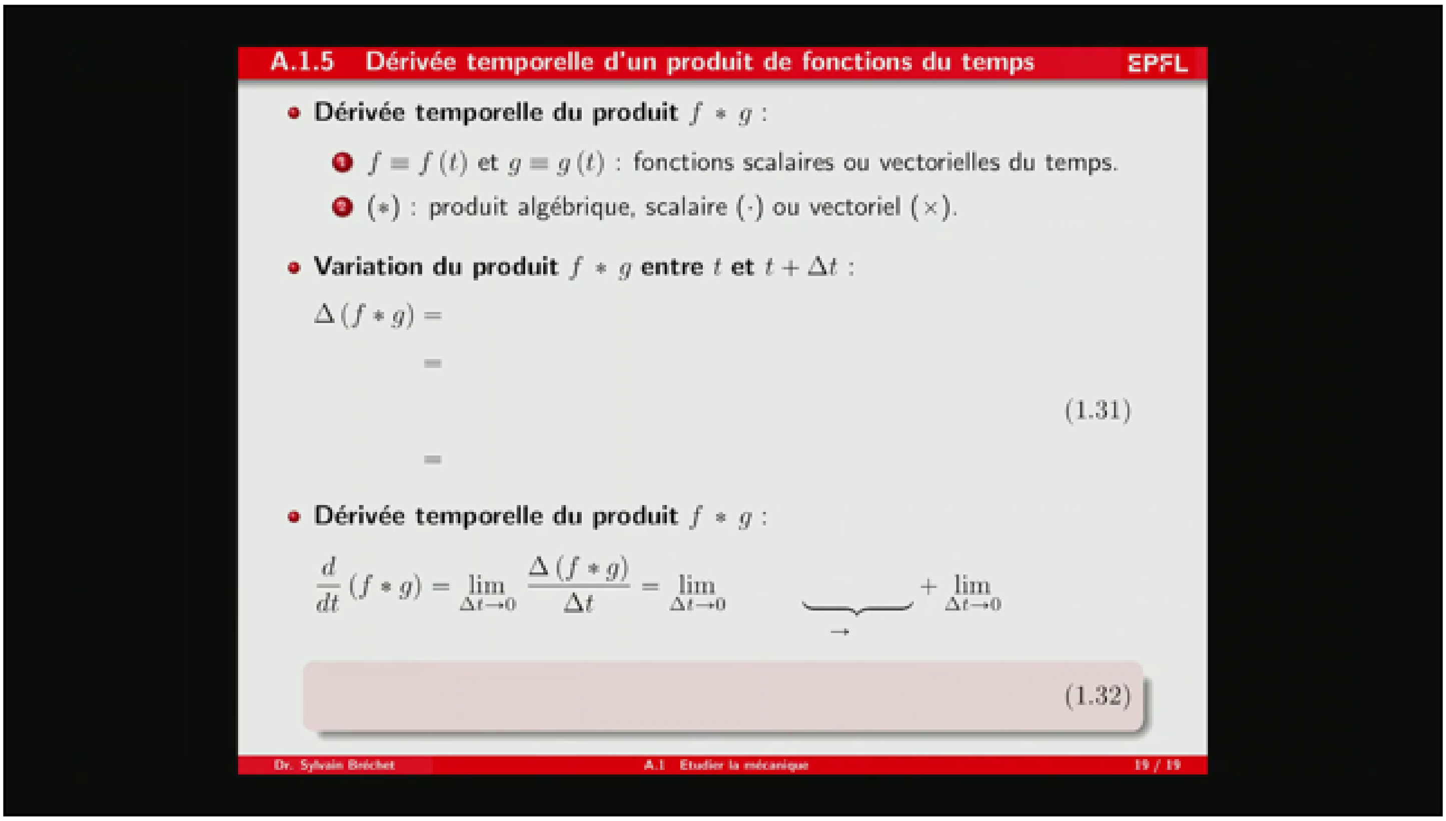
41m 21s



est orienté selon y si vous intervertissez les deux premiers vous changez le signe d'accord parce que le produit vectoriel anticommute donc on a des signes moins ok qu'est ce que ça donne concrètement pour le voir vous prenez votre main droite devant vous comme ça et puis vous essayez en perspective d'aligner les vecteurs avec un angle de 120 degrés à peu près c'est ce que vous voyez en perspective d'accord vous avez premier qui correspond à l'index en haut vous avez une majeure à droite et vous avez à gauche le pouce d'accord donc dans le sens des aigus d'une montre vous tournez dans le sens naturel du choix des vecteurs le premier le deuxième le troisième d'accord dans le sens trigonométrique vous tournez dans le sens opposé alors regarde si on prend x produit vectoriel avec y ça donne le suivant qui est z avec un signe plus si on prend y produit vectoriel avec z ça donne le suivant qui est x avec un signe plus z produit vectoriel avec x ça donne y avec un signe plus et donc si sur cette image du logo qui rappelle une célèbre marque de véhicule allemand d'accord si vous tournez dans le sens des aigus d'une montre vous prenez chaque fois le prochain vecteur avec un signe plus si vous tournez dans le sens opposé dans le sens trigonométrique dans le sens non naturel c'est le suivant avec un signe moins et c'est tout d'accord donc ça c'est la règle évidemment du logo mercellesse

notes

résumé

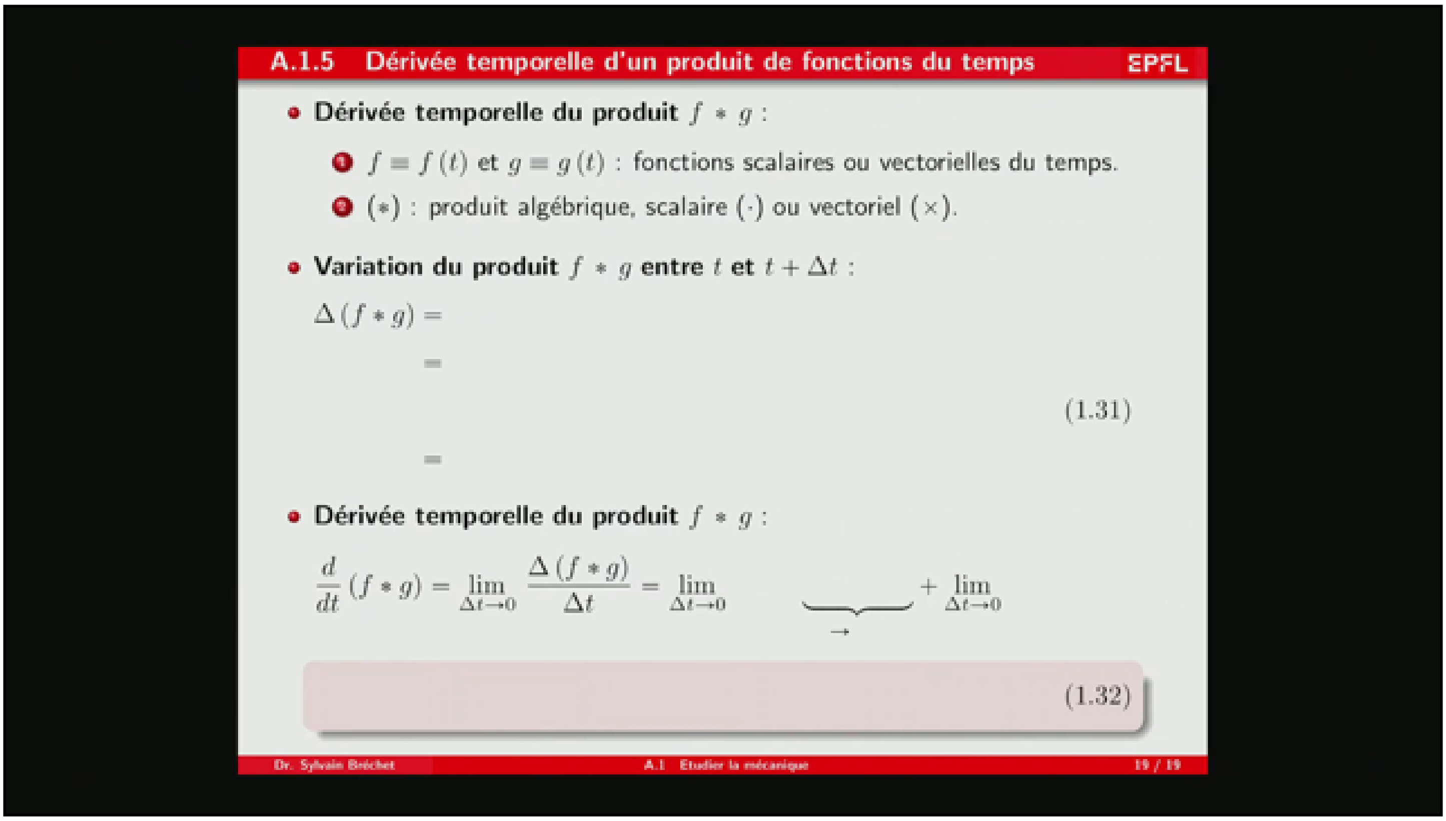


qui va vous permettre immédiatement de visualiser le résultat du produit vectoriel sans avoir à le calculer d'accord ça permet d'éviter des fautes qu'on fait régulièrement si on fait des calculs vectoriels avec des déterminants c'est une règle qui m'est venu en enseignant cette matière en me rendant compte qu'il y avait plein de problèmes de signe finalement derrière ceci vous avez la théorie des groupes c'est encore une fois le groupe des rotations groupe des permutations qui se cache là derrière bien terminons avec une règle de calcul très simple je vais faire vite c'est la dérivé temporelle d'un produit de fonction du temps qui est utile dans la pratique imaginez que vous avez deux fonctions f et g qui dépendent du temps et vous avez un produit alors ces fonctions ça peut être des nombres des fonctions scalaires au quel cas vous avez un produit algébrique ça peut être des fonctions vectorielles multipliées par un produit scalaire ou des fonctions vectorielles multipliées par un produit vectoriel c'est complètement général oui ah pardon il s'est mal affiché merci beaucoup je vais le friser voilà c'est bon il est passé donc appliquons le cas enfin faisons le calcul d'abord de la variation du produit de f fois g entre le temps t est le temps t plus delta t alors ça va être f évalué en t plus delta t produit avec g évalué en t plus delta t moins f évalué en t produit avec g évalué en t d'accord alors on va récrire exactement le premier terme en revanche on va intercaler un deuxième terme qu'on va choisir habilement ça va être moins f de t produit avec g évalué en t plus delta t comme ce terme on l'a retranché il va maintenant falloir l'ajouter pour le neutraliser on aura donc f de t produit avec g évalué en t plus delta t et il va nous

notes

résumé

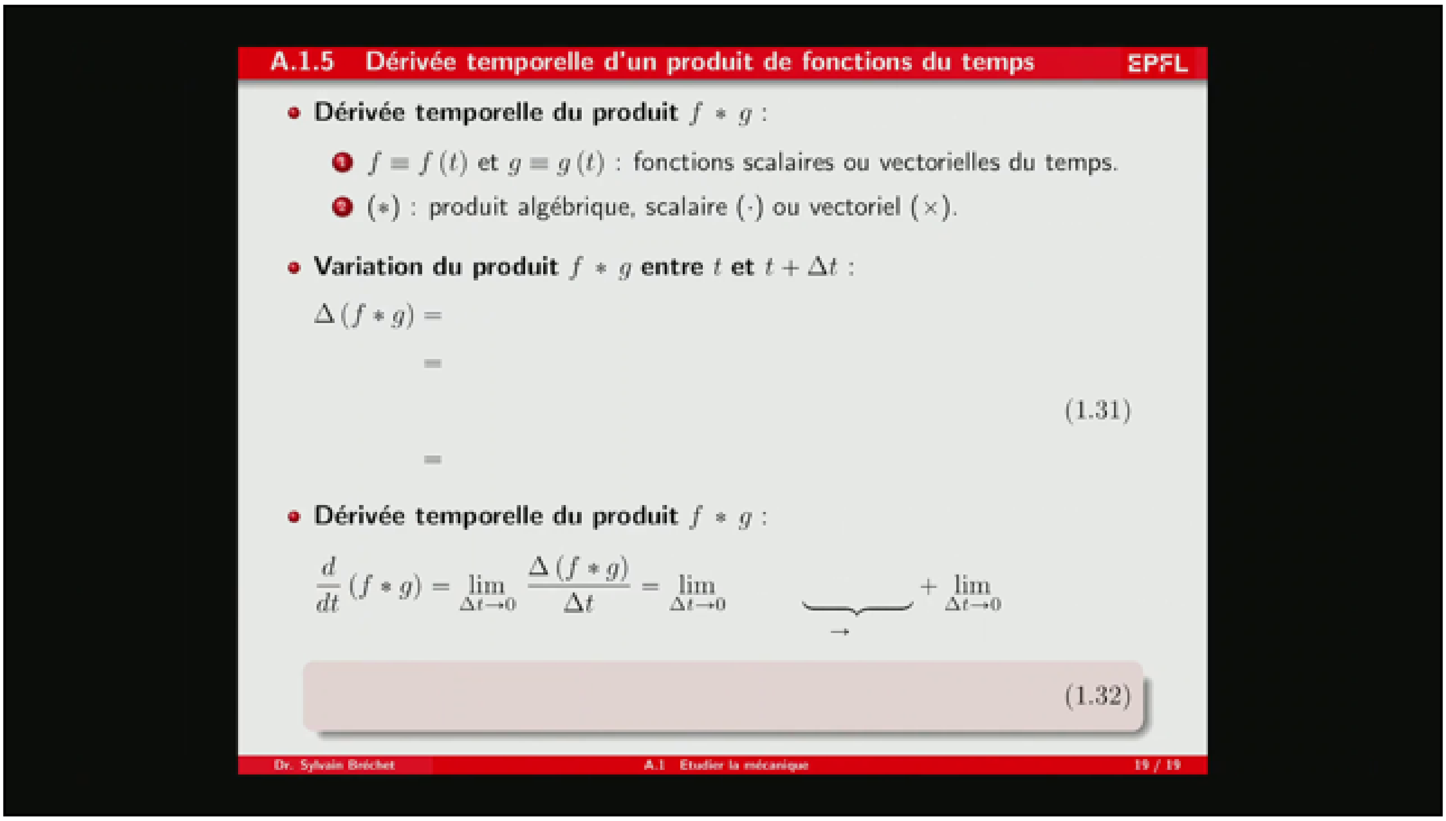
44m 49s



rester moins f de t produit avec g de t ok alors si vous regroupez les deux premiers termes vous voyez que dans le membre de droit du produit vous avez g évalué en t plus delta t et à gauche on a f évalué en t plus delta t moins f évalué en t ce qui nous donne delta f donc on a delta f produit avec g évalué en t plus delta t d'autre part si vous regroupez les deux derniers vous voyez que vous avez à gauche f de t et à droite le produit de g évalué en t plus delta t moins g évalué en t ce qui nous donne delta g très bien donc maintenant si on calcule la dérivé du produit des fonctions f et g on va prendre à limite de delta t qui tend vers zéro du rapport de la variation de ce produit sur delta t d'accord donc on va prendre le résultat de ce produit qui est ici qu'on va diviser par delta t en prend la limite dans les deux termes on aura donc la limite de delta f sur delta t produit avec g évalué en t plus delta t plus la limite de delta t qui tend vers zéro de f de t produit avec le rapport de delta g sur delta t d'accord dans la limite de delta t qui tend vers zéro le terme qui est ici va tendre vers g de t d'accord donc la limite va porter uniquement au final sur delta f sur delta t et ceci sera donc clairement la dérivé de f produit avec g et dans le deuxième terme la limite porte sur delta x delta t qu'on peut donc commuter pour l'amener ici puisqu'il a uniquement sur delta g sur delta t et il va nous rester le produit de f avec la dérivé de g par

notes

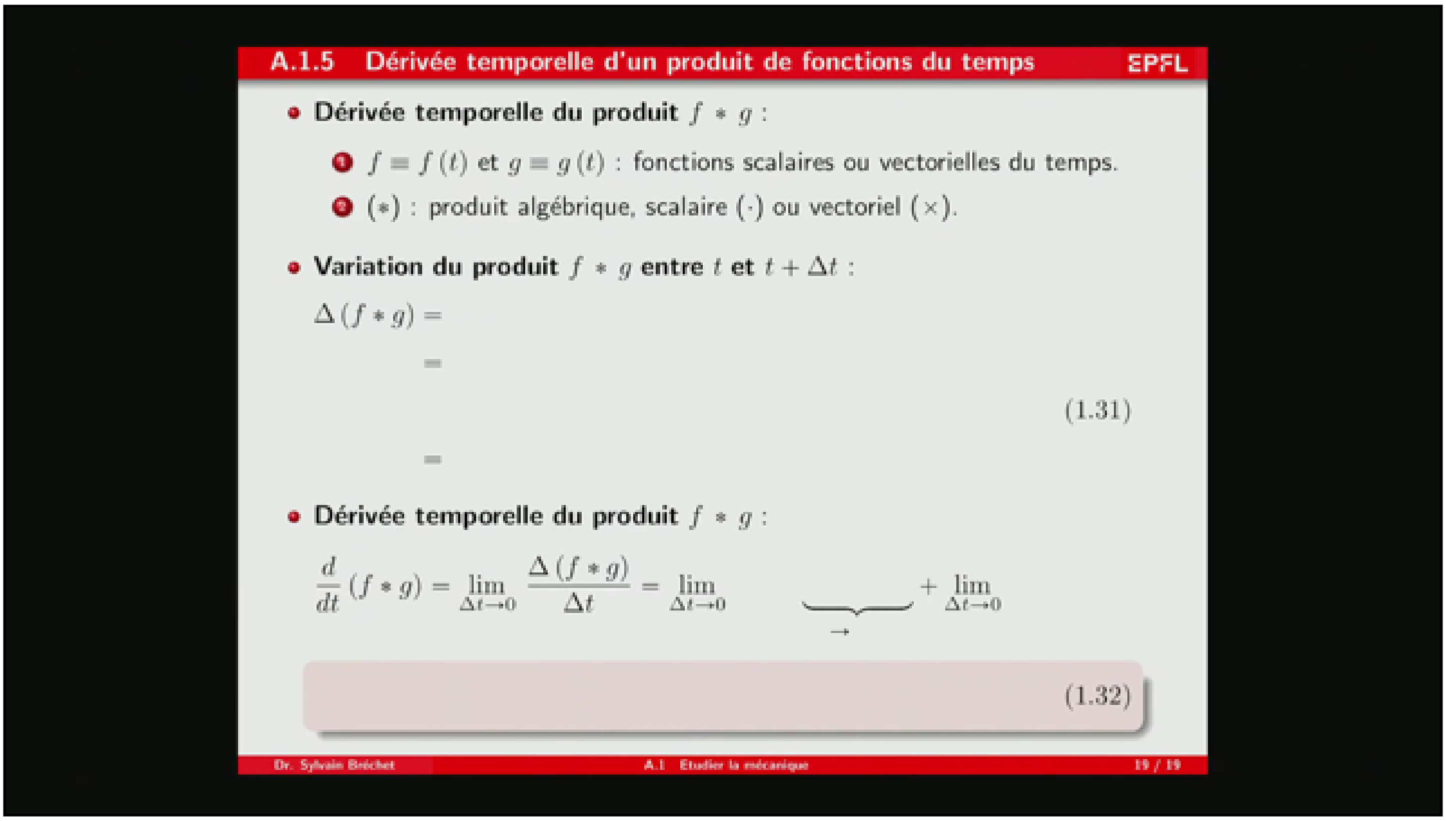
résumé



rapport à t ce qui veut dire que quel que soit vos fonctions quel que soit le produit d'accord la dérivé d'un produit de deux fonctions c'est la dérivé de la première fonction produit avec la deuxième fonction plus la première fonction produit avec le dérivé de la deuxième fonction attention si le produit est commutatif ce qui est le cas du produit algébrique et du produit scalaire pouvez intervertir les termes en revanche pour le produit vectoriel on n'a pas le droit de le faire parce qu'il n'a pas du commut on change le signe d'accord donc faut juste veiller à cela n'oubliez pas de participer aux exercices le vendredi matin dans les salles d'exercice c o 10 11 15 16 et 17 je crois qui sont toutes au sous-sol de la coupole voilà et pour répondre à la question que j'avais posé à la fin du cours précédent est-ce que certains d'entre vous ont essayé de calculer le produit vectoriel en deux et en quatre dimensions on peut utiliser une matrice pour passer de deux dimensions à trois dimensions et de quatre dimensions à trois dimensions mais directement excellente remarque les choses peuvent se décrire matriciellement et ce qui va se passer c'est que la matrice qui apparaît dans cette description est une matrice antisymmétrique alors si vous avez une matrice antisymmétrique de dimension 3 vous allez avoir trois paramètres indépendants en dessous en dessus de la diagonale avec lesquels vous pouvez faire un isomorphisme donc une bisexion avec un vector à trois composantes donc à trois dimensions ça marche à deux dimensions vous avez un seul paramètre indépendant alors que votre vecteur a deux composantes c'est fichu à quatre dimensions vous allez avoir six paramètres indépendants alors que le vecteur lui en a quatre d'accord l'isomorphisme ne sera pas non plus possible donc le produit vectoriel est un accident géométrique qui ne fonctionne qu'à trois dimensions en

notes

résumé



revanche le produit extérieur d'une algèbre se généralise en dimension n il est bien supérieur au produit vectoriel voilà sur ceci bon après-midi et on se revoit avant d'auti

notes

résumé